Solución Aproximada de Ecuaciones Cúbicas

Ubaldo BONILLA

RESUMEN

Este artículo describe un método para trazar la gráfica de una ecuación cúbica, y el uso de aquella para encontrar valores aproximados de las raíces reales de la ecuación.

SYNOPSIS

This paper describes a method to draw the graph of a cubic equation and the use of this graph in finding approximate values of the real roots of the equation.

1. *INTRODUCCION*

Las ecuaciones cúbicas aparecen en una gran cantidad de problemas de Ingeniería, como parte del proceso resolutivo; en la mayoría de los casos la solución deseada es una raíz real, pero si ya se conoce dicha raíz, se reduce el problema a la obtención de una ecuación de segundo grado.

El propósito de este trabajo no es discutir la teoría de las ecuaciones cúbicas, sino presentar un método que asegure la obtención de una raíz real. La solución se basa en un método original para trazar una curva de tercer grado (de las cuales la cisoide, la estrofoide y otras son casos particulares) usando sólo escuadras. Como únicamente un punto de la curva resulta de interés, el problema se simplifica grandemente; en algunos casos, como se verá adelante, ni siquiera es necesario dibujar una gráfica. Esto depende de la precisión buscada y de las relaciones existentes entre los coeficientes de la ecuación.

Como el método presentado aquí es semigráfico, deben reconocerse en él los inconvenientes de este tipo de procedimientos. Sin embargo, si en lugar de usar la gráfica precisa de la ecuación, se usa un croquis (sumamente sencillo de dibujar), se tendrá de inmediato un valor cercano al de la raíz, lo cual simplifica la aplicación de cualquiera de los métodos clásicos de solución (Newton, Horner y otros).

Ubaldo Bonilla se recibió de Ingeniero Civil en 1952 en la Escuela Nacional de Ingenieros; de Maestro en Ingeniería Sanitaria en la División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería, UNAM, y de Doctor en Ingeniería en la Universidad de Oklahoma; es actualmente investigador del Instituto de Ingeniería, UNAM, y profesor de la División de Estudios Superiores de la Facultad de Ingeniería, UNAM.

2. *METODO GENERAL SEMIGRAFICO*

2.1 *Transformación de la ecuación cúbica general*

La ecuación cúbica general

$$\phi(x) = x^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{1}$$

puede transformarse fácilmente en

$$x_0^3 + (3a + b)x_0^2 + (3a^2 + 2ab + c)x_0 + \\ + (a^3 + a^2b + ac + d) = 0 \tag{2}$$

haciendo

$$x = x_0 + a \tag{3}$$

Los coeficientes de la ec 2 se recuerdan rápidamente observando que el término independiente es $\sigma(a)$, el coeficiente de x_0 es $\sigma'(a)$ y el de x_0^2 es $\frac{1}{2}\sigma''(a)$, donde las primas indican derivación.
Las ecs 1 y 2 tienen la misma forma que

$$x_0^3 + \alpha x_0^2 + y_0^2 x_0 + y_0^2 \beta = 0 \tag{4}$$

Esta puede ser representada gráficamente en un sistema de ejes cartesianos $x - y$, si $y_0^2 > 0$. Consecuentemente, la solución de la ec 1 requiere de la transformación* (3) solamente en los casos en que $c \leqslant 0$, en los que el parámetro a se deberá escoger de manera que

$$(y_0^2 = 3a^2 + 2ab + c) > 0 \tag{5}$$

lo cual se satisface para múltiples valores de a; por ejemplo

$$a = |b| + |c| \tag{6}$$

2.2 *Método de solución*

El método general de solución de la ecuación cúbica se reduce al trazo de la gráfica de la ecuación transformada (4) (fig 1), lo cual se efectúa de la siguiente manera:

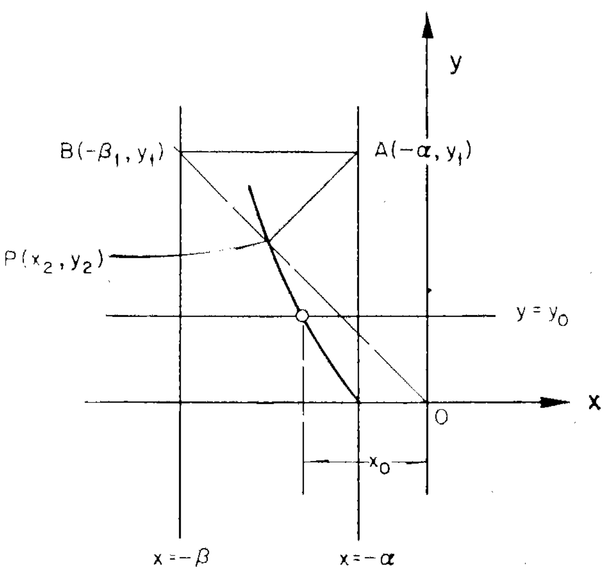

FIGURA 1

a) Identifíquese el signo de c. Si $c \leqslant 0$, escójase a como un número entero que satisfaga la ec 5. Si $c > 0$, se escogerá desde luego $a = 0$. De acuerdo con el valor de a escogido, calcúlense los coeficientes de la ec 4:

$$\alpha = 3a + b$$

$$y_0^2 = 3a^2 + 2ab + c$$

$$\beta = \frac{a^3 + a^2 b + ac + d}{y_0^2}$$

b) En un sistema de ejes cartesianos dibújense las líneas $x = -\alpha$, $x = -\beta$ y $y = y_0$. El valor de x_0 estará comprendido entre estas dos abscisas, por lo que, si $\alpha \doteq \beta$, se podrá determinar, de acuerdo con la precisión buscada, inmediatamente la raíz.

c) Dibújese una recta a través de los puntos $B(-\beta_1, y_1)$ y O (0,0) donde y_1 es una ordenada cualquiera. Por $A(-\alpha_1, y_1)$ trácese una perpendicular a OB, y márquese el punto de intersección de ambas líneas $P(x_2, y_2)$, que es un punto de la ecuación transformada (4). Repítase el proceso hasta que P caiga en la línea $y = y_0$; la abscisa de este punto es x_0. El uso de la ec 3 da finalmente la raíz buscada. Normalmente bastan menos de tres intentos para determinar x_0.

* En el subcapítulo 3.2 se presenta otro tipo de transformación más sencilla.

2.3 *Demostración*

En la fig 1, la pendiente de la línea AP es

$$m = \frac{y - y_1}{x + \alpha} \tag{7}$$

y la de la línea BP perpendicular a AP es

$$-\frac{1}{m} = \frac{y - y_1}{x + \alpha} \tag{8}$$

Dividiendo miembro a miembro

$$m = \left(-\frac{x + \beta}{x + \alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

La línea BP cruza el origen y tiene pendiente $-\frac{1}{m}$, y como $P(x,y)$ satisface la ecuación de esta línea, puede escribirse

$$y = -\frac{1}{\left(-\frac{x + \beta}{x + \alpha}\right)^{\frac{1}{2}}} x \tag{10}$$

de donde, rearreglando los términos, se obtiene finalmente:

$$x^3 + \alpha x^2 + y^2 x + \beta y^2 = 0 \tag{11}$$

que es la ecuación transformada.

2.4 *Ejemplos ilustrativos*

a) Para la ecuación

$$x^3 + 4x^2 + 16x + 64 = 0$$

se cuenta con las igualdades

$$\alpha = 4;\ y = \pm 4;\ \beta = \frac{64}{16} = 4$$

y como $\alpha = \beta = 4$, inmediatamente se obtiene $x = -4$

b) Para la ecuación

$$x^3 + 3x^2 + 16x - 48 = 0$$

se dispone de

$$\alpha = 3;\ y = \pm 4;\ \beta = -\frac{48}{16} = -3$$

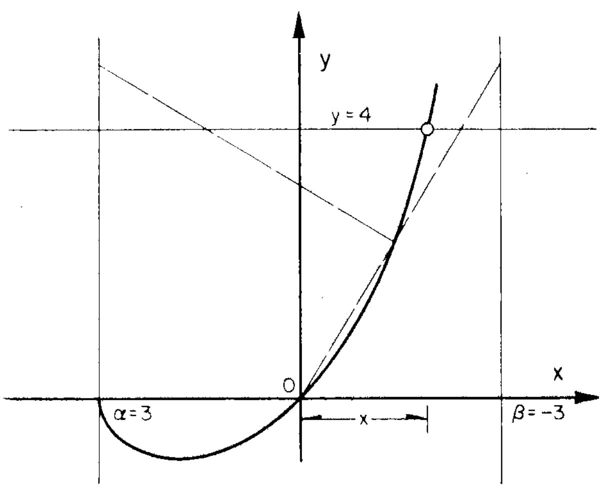

FIGURA 2

Y de la fig 2 se obtiene $x \doteq 1.90$

c) Para la ecuación

$$x^3 + 16x - 80 = 0$$

se tiene

$$\alpha = 0;\ y = 4;\ \beta = -5$$

Y de la fig 3 se obtiene $x \doteq 3.1$

d) Para la ecuación

$$x^3 - 3x^2 - 16x + 48 = 0$$

como $c < 0$, se tendrá

$$y^2 = f'(a) = 3a^2 - 6a - 16$$

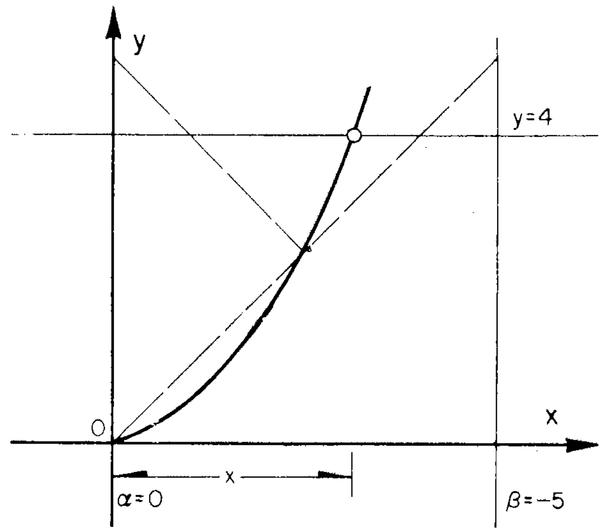

FIGURA 3

que es positivo si $a = 4$

$$y^2 = 3(16) - 6(4) - 16 = 8; \quad y = (8)^{1/2}$$

y en consecuencia,

$$\alpha = \tfrac{1}{2} f''(a) = 3a - 3 = 3(4) - 3; \quad \alpha = 9$$

$$y^2 = f(a) = 4^3 - 3(4^2) - 16(4) + 48 = 0; \quad \beta = 0$$

Y, por consiguiente, $x_0 = 0$; $x = x_0 + a$

$$x = 4$$

e) Para la ecuación

$$x^3 + 2x^2 - 8x + 32 = 0$$

como $c < 0$, se tendrá

$$y^2 = f'(a) = 3a^2 + 4a - 8$$

que es positiva si $a = 2$

$$y^2 = 3(4) + 4(2) - 8 = 12; \quad y = 3.46$$

$$\alpha = \tfrac{1}{2} f''(a) = 3a + 2 = 6 + 2; \quad \alpha = 8$$

$$\beta y^2 = f(a) = 8 + 2(4) - 8(2) + 32 = 32$$

$$\beta = \frac{32}{12} = 2.66$$

Y de la fig 4 se obtiene $x_0 = -6.9$

$$x \doteq -6.9 + 2;\ x \doteq -4.9$$

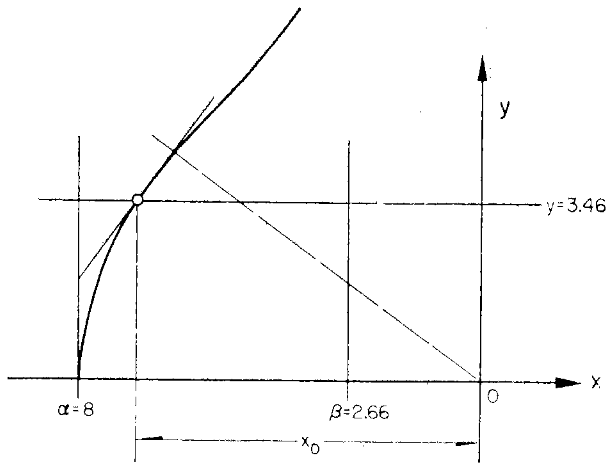

FIGURA 4

f) Para resolver la ecuación

$x^3 - 4x^2 + 16 = 0$

como $c = 0$, se tendrá

$y^2 = f'(a) = 3a^2 - 8a$

que es positiva si $a = 3$

$y^2 = 3(9) - 8(3) = 3 \quad y = 1.73$

$\alpha = \frac{1}{2} f''(a) = 3a - 4;$

$\alpha = 9 - 4; \qquad \alpha = 5$

$\beta y^2 = f(a) = 27 - 4(9) + 16 = 7$

$$\beta = \frac{7}{3} = 2.33$$

Y de la fig 5 se obtiene $x_o = -4.68$

$x = -4.68 + 3; \quad x \doteq -1.68$

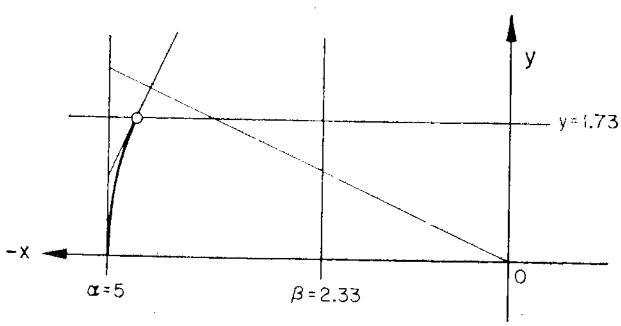

FIGURA 5

2.5 *Observaciones*

Las siguientes observaciones se refieren a la ec 4 con $y^2 > 0$.

a) La gráfica de la ecuación es simétrica respecto al eje x, cruza el punto$(-\alpha, 0)$ y es asintótica al eje $y = -\beta$

b) Si $\alpha = -\beta$, la ecuación representa una estrofoide que cruza el origen (fig 2).

$$y = \pm x\left(\frac{\alpha - x}{\alpha + x}\right)^{1/2}$$

c) $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, la ecuación representa una cisoide que cruza el origen (fig 3).

$$y^2 = \frac{x^3}{\beta - x}$$

d) Si α y β tienen el mismo signo, resulta una curva sin nombre con un punto de inflexión entre α y β, tangente al eje $y = -\alpha$ en el punto $(-\alpha, 0)$ (figs 4 y 6).

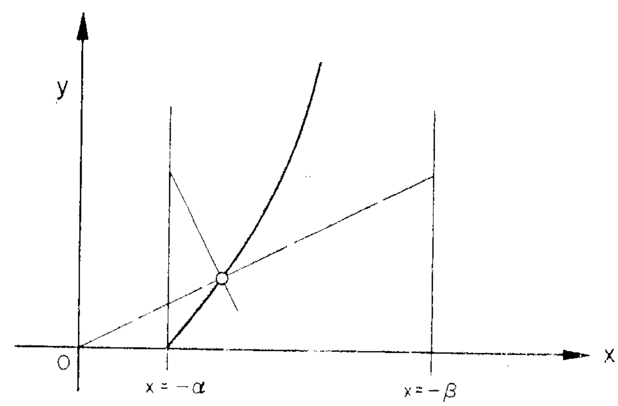

FIGURA 6

e) El valor absoluto de una raiz real está comprendido entre α y β. Si α y β tienen signos contrarios, la raíz está comprendida entre 0 y β.

3. *APLICACION AL METODO ANALITICO DE NEWTON*

3.1 *Criterio para seleccionar un valor aproximado de la raíz*

Las observaciones anotadas en el subcapítulo 2.5 permiten simplificar la aplicación del método de Newton en la resolución de las ecuaciones cúbicas.

Es sumamente sencillo trazar un croquis de la gráfica de la ecuación cúbica (4), teniendo en cuenta que la gráfica

a) Es asintótica al eje $-\beta$

b) Cruza el punto de coordenadas $(-\alpha, 0)$

c) Cruza el origen, si α y β tienen signos contrarios.

La posición de la línea $Y_0 =$ cte, indica el valor aproximado de x_0 a escoger (figs 2 a 6).

3.2 *Solución*

La solución de la ecuación general (1) se obtiene directamente sin recurrir a ninguna transformación en los casos en que $c > 0$.

En los casos en que $c \leqslant 0$, y los coeficientes b y d tengan el mismo signo, la relación

$$x = \frac{1}{x_o} \qquad (12)$$

transforma muy fácilmente la ecuación original cuando el coeficiente de la variable sea positivo.

Por ejemplo, la ecuación

$$x^3 - b\,x^2 - cx - d = 0 \qquad (13)$$

se transforma en

$$x_o^3 + \frac{c}{d}\,x_o^2 + \frac{b}{d}\,x_o - \frac{1}{d} = 0 \qquad (14)$$

y la ecuación

$$x^3 + b\,x^2 + d = 0 \qquad (15)$$

se transforma en

$$x_o^3 + \frac{b}{d}\,x_o + \frac{1}{d} = 0 \qquad (16)$$

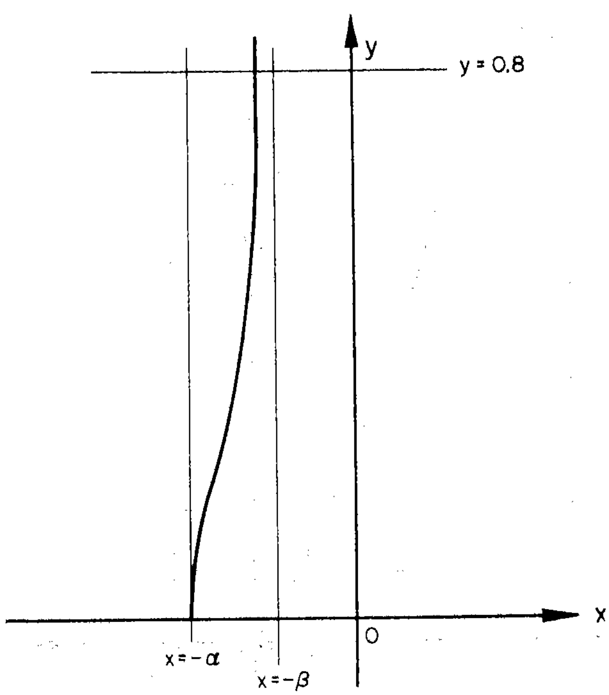

FIGURA 7

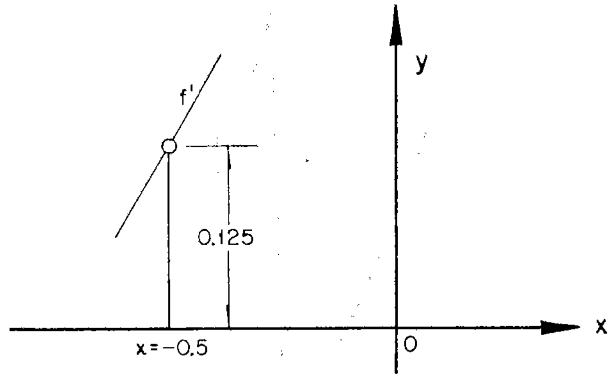

FIGURA 8

En los casos en que $c \leqslant 0$ y los coeficientes b y d tengan signos contrarios, habrá que usar la ecuación transformada (4).

El método de resolución de la ecuación con coeficiente del término a la primera potencia mayor que cero, consistirá simplemente en los siguientes pasos:

a) Determínese el valor aproximado de x_o, según lo explicado en el subcapítulo 3.1

b) Aplíquese el método de Newton o cualquier otro de los comúnmente usados para el propósito.

3.3 *Ejemplos:*

a) Para la ecuación

$$x^3 + x^2 + 64x + 32 = 0$$

se presentan

$$\alpha = 1;\ y = \pm\, 8;\ \beta = \frac{32}{64} = 0.5$$

$$|\,\alpha - \beta\,| = 1 - 0.5 - 0.5$$

como $y \gg |\,\alpha - \beta\,|$, $\quad x \doteq -0.5$

(Ver fig 7)

Aplicando el método de Newton,

$$f(-0.5) = -0.125 + 0.25 - 32 + 32 = \\ = +\,0.125$$

$$f' = 3\,x^2 + 2\,x + 64$$

$$f'(-0.5) = 3(0.25) - 2(0.5) + 64 = \\ = +\,63.75$$

(Ver fig 8)

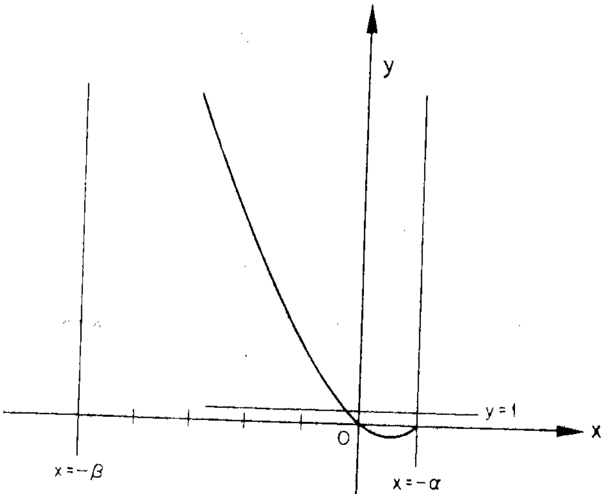

FIGURA 9

Consecuentemente,

$$x = -0.5 - \frac{0.125}{63.75}$$

$$x = -0.5 - 0.00196; \quad x = -0.500196$$

b) Para la ecuación

$$x^3 - 4x^2 + x + 20 = 0$$

se tiene

$$a = -4; \quad \eta = \pm 1; \quad \beta = 20$$

$$|\alpha - \beta| = 24; \quad \eta \ll |\alpha - \beta|$$

$$x \doteq -1$$

(Ver fig 9)

$$f(-1) = -1 - 4 - 1 + 20 = +16$$

$$f' = 3x^2 - 8x + 1$$

$$f'(-1) = +3 + 8 + 1 = +12$$

$$x = -1 - \frac{16}{12} = -2.33$$

$$f(-2.33) = -12.8 - 21.8 - 2.33 + $$
$$+ 20 = -16.93$$

$$f'(-2.33) = +16.2 + 18.7 + 1 = +35.9$$

(Ver fig 10)

$$x = -2.33 + \frac{16.93}{35.9}$$

$$x = -1.86$$

$$f(-1.86) = -6.60 - 14.0 - 1.86 + $$
$$+ 20 = -2.46$$

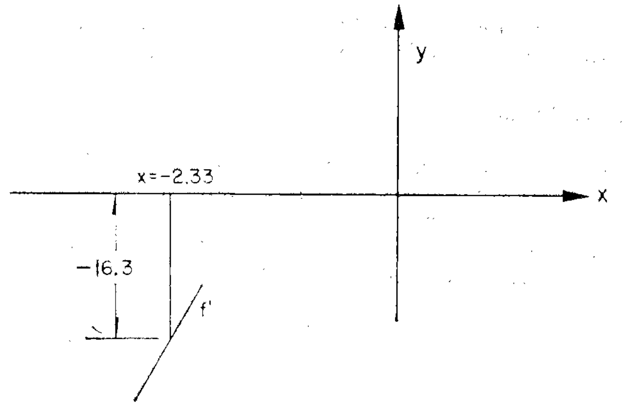

FIGURA 10

$$f'(-1.86) = 10.05 + 14.9 + 1 = +26.4$$

$$x = -1.86 + \frac{2.46}{26.4} = -1.767$$

$$f(-1.767) = -5.50 - 12.5 - 1.767 + $$
$$+ 20 = \pm 0.233$$

$$f'(-1.767) = 9.4 + 14.2 + 1 = +24.6$$

$$x = -1.767 - \frac{0.233}{2416} = 1.776$$

c) Para la ecuación

$$x^3 + 0.5x^2 - 10x + 20 = 0$$

$$x = \frac{1}{x_0}$$

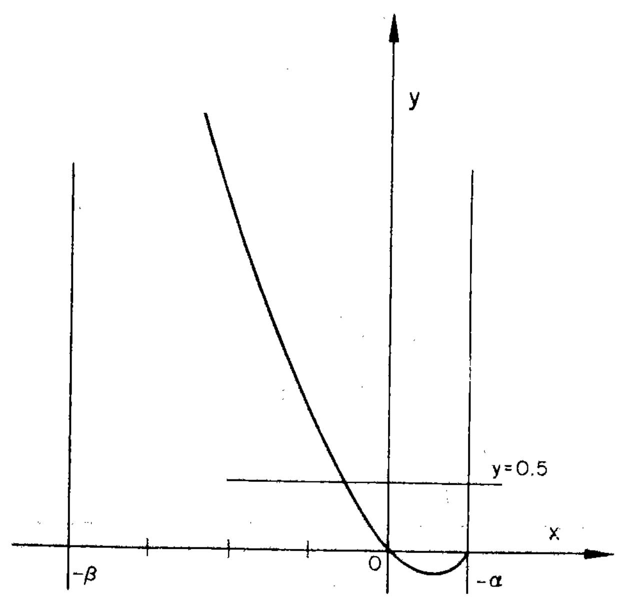

FIGURA 11