

Pandeo lateral de elementos de concreto reforzado

Roberto Meli*

ABSTRACT

Modifications of elastic theory of lateral buckling for reinforced concrete beams are discussed. A step by step method to predict buckling loads either in the elastic or in the postyielding range is proposed, and a very good agreement is found with the experimental results reported in the literature. Bounds to the dimensions of the cross section to avoid lateral buckling are obtained for ordinary beams and for those that have to be able to withstand large postyielding deformations without reduction of capacity, as in ductile frames in seismic areas.

The procedure is extended to the buckling of concrete walls under lateral loads, although no experimental evidence is available to support the results.

RESUMEN

A partir de la teoría elástica de pandeo lateral de vigas, se tratan las modificaciones necesarias para su aplicación a concreto reforzado. Se propone un procedimiento iterativo para la determinación del momento crítico de pandeo, sea que este ocurra antes o después de la fluencia del refuerzo por efecto de flexión. Se estudia la influencia de diversas variables y se comprueba que se obtiene una concordancia excelente entre los valores calculados del momento de pandeo y los obtenidos en experimentos descritos en la literatura. A partir de la aplicación del procedimiento, se deducen reglas simples y de buena aproximación para revisar si el pandeo lateral puede ser crítico, tanto para casos ordinarios, como para vigas que deban ser capaces de soportar grandes deformaciones inelásticas sin fallar, por ejemplo en estructuras dúctiles en zonas sísmicas. Extrapolando el procedimiento anterior se llega a recomendaciones para muros de concreto sujetos a cargas laterales; no existe sin embargo evidencia experimental que permita comprobar la validez de las mismas para este caso.

1. INTRODUCCION

El pandeo lateral rara vez rige el diseño de elementos de concreto. En vigas coladas en el lugar, los sistemas de piso impiden generalmente las deformaciones laterales en las zonas de compresión; las vigas prefabricadas tienen normalmente secciones T o I que proporcionan alta rigidez lateral. Existen, sin embargo, casos particulares en que las vigas no cuentan con restricciones a las deformaciones laterales y en que las dimensiones son tales que pueden presentarse problemas de pandeo lateral.

*Investigador, Instituto de Ingeniería, UNAM.

Un caso en que este problema no parece haber sido considerado, es el de muros de corte en edificios altos. Dichos muros trabajan esencialmente como elementos de flexión y tienen por lo general restricción al pandeo lateral en cada entrepiso; por tanto, su longitud de pandeo lateral es relativamente pequeña; sin embargo, la relación peralte a espesor de los muros puede llegar a ser muy grande, por lo cual es posible que no se alcance a desarrollar íntegramente la capacidad en flexión del muro por problemas de pandeo lateral. La presencia de carga vertical hace más crítico el pandeo lateral en muros.

Debido a que se trata de un problema marginal para elementos de concreto, pocos son los estudios que se han realizado sobre este tema. Las soluciones teóricas para un material homogéneo y elástico han sido obtenidas para una amplia gama de condiciones (ref 1). Para estructuras de acero, el problema ha sido estudiado con mucho detalle, incluyendo el caso de pandeo inelástico, debido a la importancia que tiene para elementos de este material. Una presentación muy clara y completa del tema se encuentra en el texto de Mc Guire (ref 2). Hansell y Winter (ref 3) plantearon la solución para elementos de concreto reforzado, incluyendo el efecto del agrietamiento y de la no linealidad; Massey (ref 4) propuso procedimientos muy refinados para incluir el efecto del refuerzo. En lo que respecta a la información experimental, existe un número no despreciable de ensayos de vigas con distintos tipos de refuerzo y diferentes condiciones de carga, en los que se ha obtenido falla por pandeo lateral (refs 3 a 7).

La información teórica y experimental existente no se ha transformado en recomendaciones prácticas y racionales de diseño. Una prueba de esto es la diversidad y excesiva simplicidad de las recomendaciones existentes. Los distintos reglamentos se limitan a especificar restricciones a las dimensiones de los elementos; si se cumplen estas no es necesario revisar los efectos del pandeo lateral. Algunos ejemplos de estas restricciones son los siguientes:

Recomendaciones de ACI-1971	$L/b \leq 50$
Reglamento del D.F. (1976)	$L/b \leq 40$ (20 si se requiere gran ductilidad)
Reglamento Británico CP-110	$\begin{cases} L/b \leq 60 \\ L/b \leq 250 b/d \end{cases}$
el menor entre	

En las expresiones anteriores, L es la longitud de la viga entre soportes laterales, b y d son el ancho y peralte de la sección.

En lo que respecta a muros, la situación es todavía menos clara. No se conocen estudios teóricos o experimentales; en algunos reglamentos se fijan restricciones a las dimensiones de muros cuyo origen no está claro y que no se sabe si obedecen a requisitos de pandeo lateral o de pandeo por carga vertical.

El objeto de este trabajo es aprovechar la información teórica y experimental existente para proponer un procedimiento general para la revisión del pandeo lateral en vigas, así como recomendaciones prácticas que puedan incluirse en los reglamentos de diseño. De los procedimientos para vigas se harán extrapolaciones para el caso de muros de corte, poniendo en evidencia la importancia del problema y la necesidad de estudios experimentales.

2. ANALISIS TEORICO DEL PANDEO LATERAL DE VIGAS DE CONCRETO

2.1 Planteamiento

En la fig 1 se muestra esquemáticamente el fenómeno de pandeo lateral de vigas.

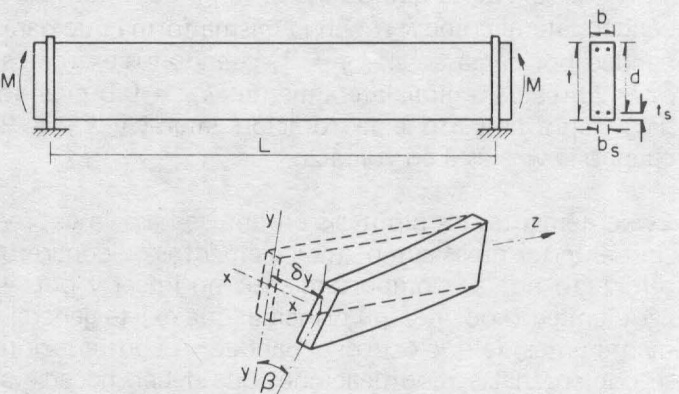


Fig 1. Pandeo lateral de vigas

El momento crítico de pandeo lateral de vigas de material homogéneo y con una relación lineal esfuerzo-deformación, se puede calcular con la siguiente expresión aproximada; válida cuando la rigidez ante flexión principal es mucho mayor que la rigidez lateral y se puede despreciar la rigidez al alabeo:

$$M_{cr} = \frac{k_1 k_2}{k_3} \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_y G \tau} \quad (1)$$

El producto EI_y representa la rigidez de la sección a flexión transversal, siendo E el módulo de elasticidad e I_y el momento de inercia alrededor del eje débil. El producto GJ representa la rigidez torsional, siendo G el módulo de rigidez al cortante y J la constante de torsión de Saint Venant, no el momento polar de inercia. L es la longitud de la viga no soportada lateralmente.

k_1 es una constancia que depende de la distribución de momentos en la viga ($k_1 = 1$ para momento constante; $k_1 = 1.35$ para carga concentrada en el centro de una viga simplemente apoyada; $k_1 = 1.14$ para carga uniformemente distribuida en una viga simplemente apoyada).

k_2 es una constante que depende de la posición en que se aplica la carga en la sección; si la carga se aplica cerca del borde de compresión su efecto es más desfavorable que si se aplica en la zona de tensión; de la ref 2:

$$k_2 = 1 + \frac{\beta \pi}{2} \frac{t}{L} \sqrt{\frac{EI_y}{GJ}}$$

en que t es el peralte de la sección y $\beta = 0$ para carga en el centroide, $\beta = +0.55$ para carga aplicada en el borde de tensión y $\beta = -0.55$ para carga aplicada en el de compresión. Para otros casos véase ref 2.

k_3 es la constante que define la longitud efectiva de pandeo lateral como $k_3 L$, en la misma forma que para pandeo por carga axial; $k_3 = 1$, cuando los extremos están libres para girar lateralmente; $k_3 = 0.5$ cuando hay empotramiento a la rotación lateral y $k_3 = 2$ cuando la viga está en voladizo.

Evidentemente, las hipótesis en que se basa la expresión anterior no se cumplen en elementos de concreto reforzado por su comportamiento no lineal y por el agrietamiento por flexión principal que existe generalmente antes de que ocurra el pandeo. A continuación se comentan las modificaciones que deben hacerse a la expresión anterior para su aplicación a vigas de concreto reforzado. Hansell y Winter (ref 3) han demostrado que la ec 1 sigue siendo válida para materiales de comportamiento no lineal si en ella se emplea el módulo de elasticidad secante en la fibra más esforzada en compresión en lugar del módulo tangente inicial. La demostración se basa en la hipótesis generalmente aceptada en columnas de que para cada fibra de la sección interviene el módulo tangente para el nivel de esfuerzos al que está sujeta la fibra.

Para la curva esfuerzo-deformación del concreto en compresión ante cargas de corta duración suele em-

plearse una parábola seguida por un tramo recto, en la forma representada en la fig 2. Para esta curva el módulo de elasticidad secante varía con el nivel de esfuerzos; por tanto, para poder determinarlo habrá que conocer el esfuerzo en el concreto para el cual ocurre el pandeo.

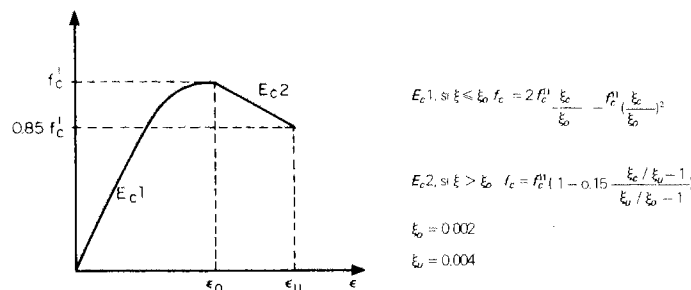


Fig 2. Relación esfuerzo deformación para el concreto

En cuanto al momento de inercia alrededor del eje débil, la suposición que parece más razonable, aunque posiblemente sea conservadora, es considerar el momento de inercia de la sección agrietada transformada o sea la contribución de la porción de la sección de concreto arriba del eje neutro y del acero de refuerzo; lo anterior da lugar a la expresión siguiente para el cálculo de la rigidez por flexión:

$$(EI_y)_{eq} = E_{sec} \frac{ab^3}{12} + E_s \sum I_{sy}$$

donde a es la profundidad del eje neutro; b , el ancho de la sección; E_{sec} , el módulo de elasticidad secante del concreto en la fibra extrema de compresión; E_s , el módulo de elasticidad del refuerzo, que debe tomarse como el módulo tangente si el esfuerzo en el acero es menor que el de fluencia y como cero para todas las barras que estén fluyendo, y $\sum I_{sy}$ la suma de los momentos de inercia con respecto al eje y de todas las barras de refuerzo.

Para cantidades usuales de refuerzo, la contribución de este a la rigidez en flexión es pequeña y despreciable para niveles bajos de esfuerzo, pero se vuelve significativa para esfuerzos altos cuando el módulo secante y la sección en compresión del concreto se reducen; finalmente, la contribución del refuerzo a la rigidez se anula bruscamente al fluir el acero.

La rigidez torsional de la sección está definida por el producto GJ . A este respecto, Massey (ref 4) ha reali-

zando una serie de ensayos determinando experimentalmente la rigidez torsional; encontró que su valor se predice mejor si se emplea el momento de inercia de la sección intacta de concreto y no el de la sección agrietada; encontró además que la rigidez torsional disminuye ligeramente a medida que aumenta el nivel de esfuerzos, pero en proporción mucho menor que lo que se obtendría reduciendo el módulo de elasticidad secante. Con base en la analogía de la membrana, Massey propone la expresión siguiente para calcular la rigidez torsional:

$$GJ = \frac{b^3 d G_c}{3} + \frac{1}{3} (G_s - G_c) \sum b_s^3 t_s$$

en que G_c y G_s son, respectivamente, el módulo de rigidez del concreto y del acero. Los otros términos se definen en la fig 1. Para el módulo de rigidez se aplica la relación elástica

$$G = \frac{E_{tan}}{2(1 + \nu)}$$

El módulo de Poisson, ν , puede tomarse como 0.25 para el concreto. El segundo término de la expresión representa la contribución del refuerzo a la rigidez; dicha contribución puede despreciarse si la cantidad de refuerzo de la sección no es muy grande.

Introduciendo en la ec 1 las modificaciones mencionadas para hacerla aplicable a vigas de concreto se obtiene

$$M_{cr} = \frac{k_1 k_2}{k_3} \frac{\pi}{L} \sqrt{(E_{sec} \frac{ab^3}{12} + E_s \sum I_{sy})} \cdot \sqrt{[\frac{b^3 d}{3} G_c + \frac{1}{3} (G_s - G_c) \sum b_s^3 t_s]} \quad (2)$$

Si se desprecia la contribución del refuerzo a la rigidez en flexión y torsión la expresión se reduce a

$$M_{cr} = \frac{k_1 k_2}{k_3} b^3 d f'_c \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E_{sec}}{12 f'_c} \frac{a}{d} \frac{G_c}{3 f'_c}}$$

Si se introduce la constante $\omega = \frac{k_1 k_2}{k_3}$ y se hace adimensional la expresión, se obtiene

$$\frac{M_{cr}}{b d^2 f'_c} = \omega \frac{\pi b^2}{L d} \sqrt{\frac{E_{sec}}{12 f'_c} \frac{a}{d} \frac{G_c}{3 f'_c}} \quad (3)$$

$$\text{en que } \frac{E_{sec}}{f'_c} = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_o} (2 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_o}), & \text{si } \epsilon_c \leq \epsilon_o \\ \frac{1}{\epsilon_c} (1 - 0.15 \frac{\epsilon_c - \epsilon_o}{\epsilon_u - \epsilon_o}), & \text{si } \epsilon_c > \epsilon_o \end{cases}$$

$$\frac{G_c}{f'_c} = \frac{2}{\epsilon_o} \left[\frac{1}{2(1 + \nu)} \right] = \frac{0.8}{\epsilon_o}$$

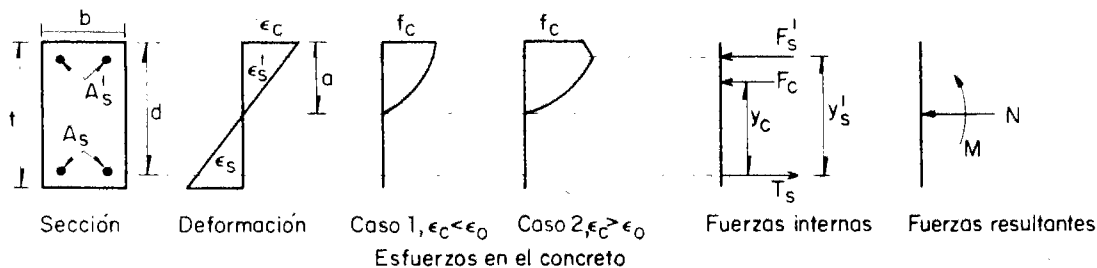
siendo ϵ_c la deformación del concreto en la fibra extrema de compresión y ϵ_u la deformación de aplastamiento (fig 2)

2.2 Método paso a paso para determinar el momento de pandeo

Con base en las consideraciones anteriores, puede establecerse un procedimiento paso a paso para la determinación del momento crítico de pandeo lateral de una viga de concreto. Dadas las características de los materiales y de la sección, se van suponiendo valores crecientes de la deformación del concreto en la fibra extrema de compresión (ϵ_c). Para cada deformación se determina por tanteos la profundidad del eje neutro que corresponde al equilibrio de fuerzas axiales. Para la profundidad del eje neutro obtenida se calcula el momento resultante de las fuerzas internas y, en función de la deformación de la fibra extrema de compresión, se determina el momento crítico de pandeo con la ec 2. Si el momento de pandeo resulta menor que el momento resultante de las fuerzas internas se incrementa la deformación del concreto repitiendo las mismas operaciones. Cuando se obtenga que los dos momentos son iguales se habrá determinado el momento crítico de pandeo. Si se llega a la deformación de aplastamiento del concreto sin que el momento de pandeo haya excedido el momento resistente de las fuerzas internas, esto implica que el comportamiento de la viga está regido por flexión y que no hay problemas de pandeo lateral.

En la fig 3 se presentan las fórmulas para el cálculo de la relación momento-rotación (o carga-deflexión) completa de la viga. Todas las expresiones se presentan en forma adimensional.

La fig 4 muestra las relaciones momento-curvatura obtenidas con el procedimiento descrito para secciones con proporciones de refuerzo de tensión y compresión que varían desde el mínimo permisible hasta los porcentajes que corresponden a falla balanceada. Se aprecia cómo disminuye la ductilidad al aumentar el refuerzo y cómo el refuerzo de compresión aumenta notablemente la ductilidad.



a) Estados de esfuerzos y fuerzas resultantes en una sección sujeta a flexocompresión

$$\eta = \epsilon_c / \epsilon_0$$

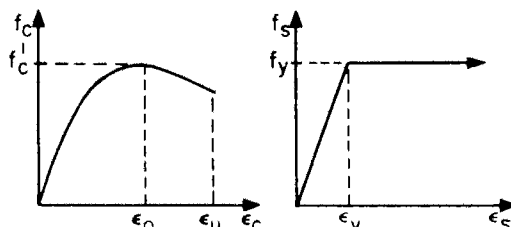
$$\alpha = \epsilon_u / \epsilon_0$$

$$\beta = \epsilon_y / \epsilon_0$$

$$\psi = \frac{d}{a} \eta$$

$$D = r / d$$

$$q = \frac{A_s f_y}{b d f'_c} \quad q' = \frac{A'_s f_y}{b d f'_c}$$



b) Variables adimensionales

d) Resultantes del concreto

e) Curvas esfuerzo - deformación

$$\frac{F_c}{b d f'_c} = \frac{\eta^2}{\psi} \left(1 - \frac{\eta}{3} \right) \quad \frac{F_c y_c}{b d^2 f'_c} = \frac{\eta^3}{\psi^2} \left(\frac{2}{3} - \frac{\eta}{4} \right) + \frac{F_c}{b d f'_c} (1 - \eta / \psi) \quad \text{Caso 1}$$

$$\frac{F_c}{b d f'_c} = \frac{1}{\psi} \left[\frac{2}{3} + \frac{\eta - 1}{\alpha - 1} (\alpha - 0.925 - 0.075 \eta) \right] \quad \frac{F_c y_c}{b d^2 f'_c} = \frac{1}{\psi^2} \left[\frac{5}{12} + \frac{(\eta^2 - 1)(\alpha - 0.925 - 0.075 \eta)}{2(\alpha - 1)} \right] + \frac{F_c}{b d f'_c} (1 - \eta / \psi) \quad \text{Caso 2}$$

e) Resultantes del refuerzo

$$\frac{F_s}{b d f'_c} = q \frac{\psi}{\beta} (1 - \eta / \psi) \leq q; \quad F_s y_s = 0 \quad \text{Refuerzo de tensión}$$

$$\frac{F'_s}{b d f'_c} = q - \frac{\psi}{\beta} (\eta / \psi - D) \leq q'; \quad \frac{F'_s y'_s}{b d^2 f'_c} = \frac{F'_s}{b d f'_c} (1 - D) \quad \text{Refuerzo de compresión}$$

f) Procedimiento iterativo

se da un valor inicial a η

Se encuentra por tanteos el valor de ψ para el cual se cumple

$$F_c + F'_s - F_s = 0$$

Para ese valor se calcula el momento resultante

$$\frac{M}{b d^2 f'_c} = \frac{F_c y_c}{b d^2 f'_c} + \frac{F'_s y'_s}{b d^2 f'_c}$$

Se tiene así un punto de la curva momento - curvatura

Se incrementa η progresivamente hasta que $\eta = \alpha$ que corresponde a la falla por aplastamiento.

Fig 3. Procedimiento para la obtención de la relación momento curvatura de una sección de concreto

En la fig 5 se muestra para distintas condiciones de refuerzo la variación del momento teórico de pandeo lateral a medida que aumenta la curvatura. El momento de pando disminuye primero lentamente con la

curvatura y muestra una reducción brusca cuando ocurre la fluencia del refuerzo. El pandeo ocurre cuando la curva que representa el momento de pandeo intercepta la gráfica momento-curvatura.

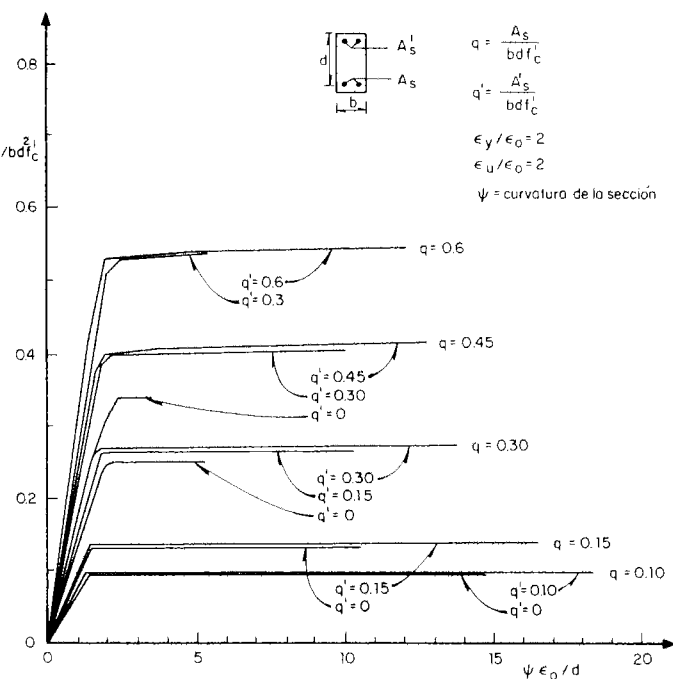


Fig 4. Relación momento - curvatura para secciones de concreto reforzado

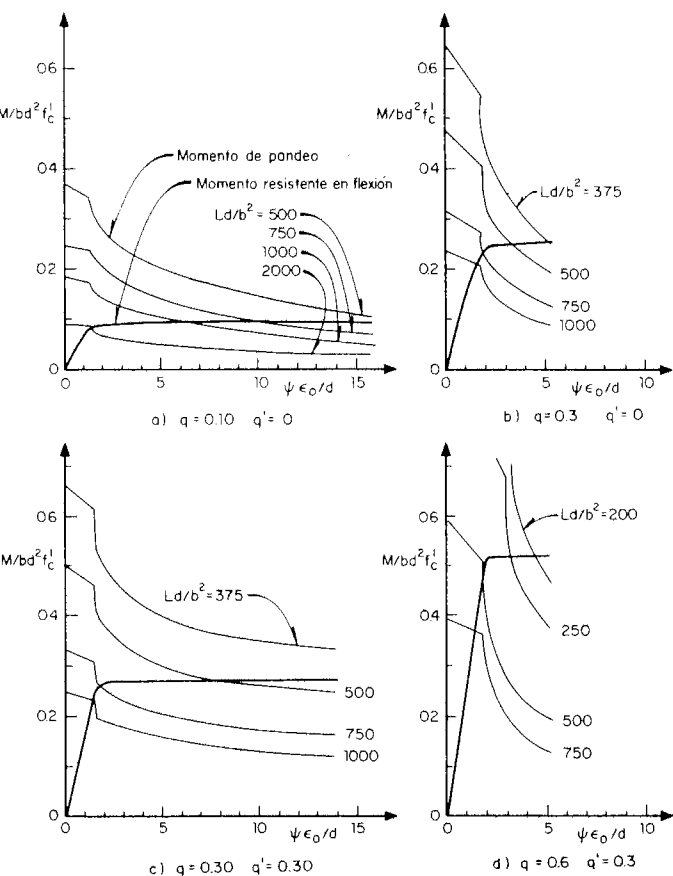


Fig 5. Variación del momento crítico de pandeo con la curvatura de la sección

Se aprecia cómo, al depender de la relación Ld/b^2 , el pandeo puede ocurrir antes de la fluencia, después de esta o no ocurrir. Los casos mostrados cubren condiciones extremas de refuerzo (porcentaje mínimo y máximo admisibles en vigas); se observa que los momentos de pandeo no difieren en forma importante para las diferentes cantidades de refuerzo.

2.3 Método aproximado para determinar el momento de pandeo

Las incertidumbres que se tienen en la determinación de los parámetros que definen el problema, la variabilidad de los mismos, así como la importancia marginal que tiene el problema de pandeo lateral para elementos de concreto reforzado, justifican la búsqueda de un procedimiento simplificado para la determinación del momento crítico.

La ec 3 puede describirse como

$$\frac{M_{cr} L}{\omega b^3 d f'_c} = A$$

siendo

$$A = \pi \sqrt{\frac{E_{sec}}{12 f'_c} \frac{a}{d} \frac{G}{3 f'_c}}$$

En lugar de calcular A obteniendo por aproximaciones sucesivas los valores de las variables que intervienen, su valor se obtendrá experimentalmente calculando el parámetro $M_{cr} L / \omega b^3 d f'_c$ para todos los ensayos y analizando su variación.

3. ANALISIS DE LA INFORMACION EXPERIMENTAL SOBRE EL PANDEO LATERAL DE VIGAS

3.1 Presentación de los resultados existentes

A continuación se describen brevemente los distintos programas experimentales que se han encontrado en la literatura sobre el tema.

Massey (ref 4) ensayó 13 vigas de 0.5×3 pulg (1.27×7.6 cm) de sección, con cuantías de refuerzo que hacían las secciones netamente sobrerreforzadas. Algunas vigas tenían únicamente refuerzo de tensión y otras eran doblemente reforzadas. Las vigas se ensayaron bajo momento constante en claros variables entre 24 y 72 pulg (61.0×182.9 cm). Todos los especímenes fallaron por pandeo lateral excepto el 4 que falló por flexión. El momento de pandeo para las vigas doblemente reforzadas (7 a 13) fue notablemente superior al correspondiente a las vigas simplemente reforzadas (1 a 6).

Sant y Bletzacker (ref 5) realizaron once ensayos de vigas de 240 pulg (609.6 cm) de claro y cuya sección tenía un ancho de 2.5 pulg (6.3 cm) y un peralte variable entre 12 y 36 pulg (30.5 a 91.4 cm). Solamente había refuerzo de tensión en una cuantía que hacía las secciones netamente subreforzadas. Las vigas se ensayaron simplemente apoyadas con carga en el centro del claro aplicada en la cara de compresión. Se obtuvo falla por pandeo antes que se alcanzara la fluencia del refuerzo, excepto en las vigas de menor peralte (12-1 y 12-2) en las que se alcanzó el momento de fluencia y después se tuvo falla por pandeo lateral.

Smith (ref 6) ensayó dos series de vigas con claro de 71 pulg (180.3 cm). Las secciones fueron de 0.675 x 3 pulg. (1.7 x 7.6 cm) en la primera serie y de 0.482 x 4 pulg (1.2 x 10.2 cm) en la segunda; en ambas series las secciones eran doblemente reforzadas y netamente subreforzadas. Los especímenes se ensayaron simplemente apoyados con carga en el centro del claro aplicada en el centroide de la sección. Las vigas de la segunda serie fallaron claramente por pandeo antes de llegar a la fluencia, mientras que las de la primera serie deben haber llegado a la fluencia y después haberse pandeado.

En la Building Research Station (ref 7) se realizó una serie muy amplia de ensayos cuyos resultados no han sido publicados. En el trabajo de Marshall (ref 8) se presentan los resultados de algunos de estos ensayos (16 especímenes). Las secciones fueron de 2 pulg (5.1 cm) de ancho con peraltes de 12, 20 y 30 pulg (30.5, 50.8 y 76.2 cm) y con claros variables entre 120 y 360 pulg (304.8 a 914.4 cm). Algunas secciones tenían refuerzo de tensión únicamente y otras también de compresión. En todos los casos las secciones fueron subreforzadas.

Las vigas se ensayaron con cargas en los tercios y se obtuvo falla por pandeo antes de la fluencia en todos los casos, excepto en los especímenes 3A1, 11AS y 11BS.

Hansell y Winter (ref 2) ensayaron 10 vigas de 2.5 x 13.5 pulg (6.3 x 34.3 cm) de sección, simplemente reforzadas y con cargas en los cuartos de claro. Los claros variaron entre 72 y 216 pulg (182.9 y 1564.6 cm). En todos los casos se alcanzó la capacidad por flexión sin que hubiese complicaciones por efectos de pandeo lateral.

A continuación se presentan algunas observaciones generales sobre el comportamiento de los especímenes y modos de falla.

En los ensayos en los que se indicó falla por pandeo, el comportamiento fue como el que se observa en la fig 6a, o sea que, después de una zona de comportamiento lineal y antes de alcanzar la capacidad por flexión, la viga sufrió un pandeo lateral con el cual las deflexiones verticales y horizontales aumentaron rápidamente pero sin ocasionar una disminución en la capacidad de carga.

En casi la totalidad de los ensayos en los que se ha indicado una falla por flexión, el comportamiento fue como el de la fig 6b, o sea, que se alcanzó la capacidad por flexión al ocurrir la fluencia del refuerzo de tensión; casi inmediatamente, la reducción en rigidez del elemento provocó el pandeo lateral; debido a esto las deformaciones en el concreto en el lado cóncavo en la fibra extrema crecieron rápidamente hasta provocar la falla final por aplastamiento del concreto.

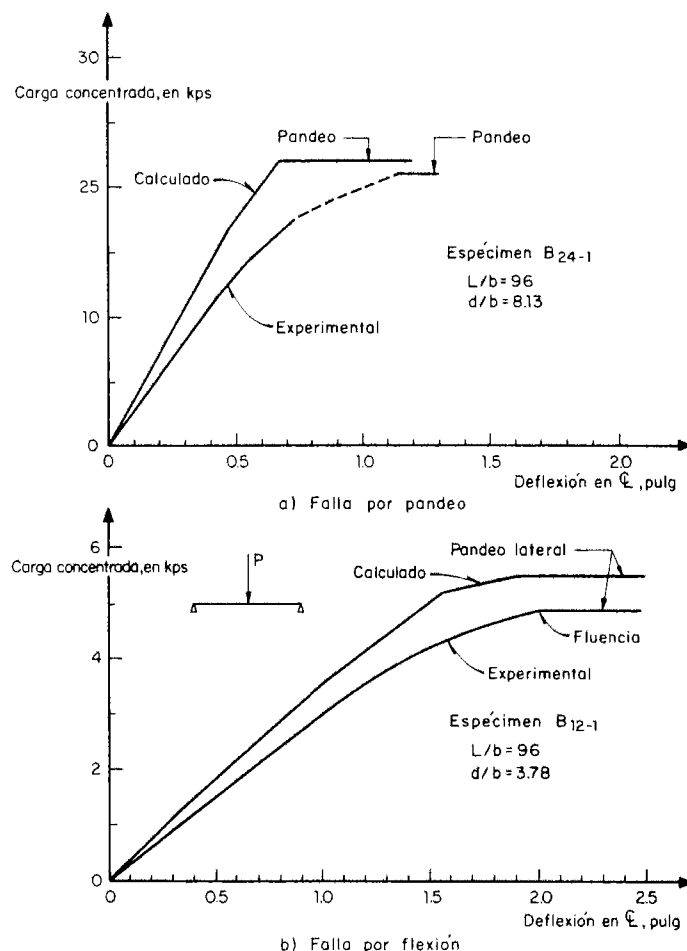


Fig 6. Curvas carga - deflexión experimentales y calculadas de vigas. (Ensayes de Sant y Bletzacker, ref 5)

El hecho de que existieran pequeñas torceduras y deformaciones previas en los especímenes, ya sea intencionales o accidentales, no pareció afectar el momento crítico de pandeo.

Los resultados de las investigaciones descritas se presentan en la tabla 1 en forma resumida. Se consignan los parámetros adimensionales que influyen en el problema y el momento crítico registrado experimentalmente y el calculado con el procedimiento paso a paso propuesto, ambos en forma adimensional.

**TABLA 1. PANDEO LATERAL DE VIGAS DE CONCRETO
COMPARACION DE RESULTADOS TEORICOS Y
EXPERIMENTALES.**

Fuente	Identi- ficación	$\frac{Ld}{b^2}$	q	q	Experimental		Calculado		Tipo Falla
					$\frac{Ld}{b^2}$	$\frac{MuL}{\omega b^3 df'_c}$	$\frac{Ld}{b^2}$	$\frac{MuL}{\omega b^3 df'_c}$	
Massey (ref 4)	1	490	0.92	--	192	<i>P</i>	200	<i>FP</i>	
	2	490	--	--	210	<i>P</i>	200	<i>FP</i>	
	3	368	--	--	208	<i>P</i>	150	<i>F</i>	
	4	245	--	--	(116)	<i>FP</i>	(100)	<i>P</i>	
	5	614	--	--	252	<i>P</i>	236	<i>P</i>	
	6	736	--	--	227	<i>P</i>	255	<i>P</i>	
	7	490	1.19	--	317	<i>P</i>	272	<i>P</i>	
	8	490	--	--	292	<i>P</i>	272	<i>P</i>	
	9	368	--	--	262	<i>P</i>	259	<i>P</i>	
	10	245	--	--	209	<i>P</i>	204	<i>P</i>	
	11	736	--	--	409	<i>P</i>	286	<i>P</i>	
	12	736	--	--	323	<i>P</i>	286	<i>P</i>	
	13	614	--	--	274	<i>P</i>	282	<i>P</i>	
Sant y Bletzacker (ref 5)	36-1	1195	0.30	360	155	<i>P</i>	175	<i>P</i>	
	36-2	1195	--	360	179	<i>P</i>	175	<i>P</i>	
	36-3	1195	--	360	131	<i>P</i>	175	<i>P</i>	
	30-1	980	--	294	226	<i>P</i>	208	<i>P</i>	
	30-2	980	--	294	239	<i>P</i>	208	<i>P</i>	
	30-3	980	--	294	157	<i>P</i>	208	<i>P</i>	
	24-1	780	--	234	172	<i>P</i>	192	<i>P</i>	
	24-2	780	--	234	184	<i>P</i>	192	<i>P</i>	
	24-3	780	--	234	196	<i>P</i>	192	<i>P</i>	
	12-1	360	--	108	()	<i>F</i>	(94)	<i>F</i>	
	12-2	360	--	108	()	<i>F</i>	(94)	<i>F</i>	
	111	1060	0.30	418	224	<i>P</i>	217	<i>P</i>	
	112	1060	--	418	147	<i>P</i>	217	<i>P</i>	
Smith (ref 6)	113	1060	--	418	206	<i>P</i>	217	<i>P</i>	
	114	1060	--	418	193	<i>P</i>	217	<i>P</i>	
	115	1060	--	418	162	<i>P</i>	217	<i>P</i>	
	11 a 17	408	--	144	()	<i>F</i>	(110)	<i>F</i>	
	4 A 1	920	0.30	294	238	<i>P</i>	198	<i>P</i>	
	4 A 1	920	0.30	294	238	<i>P</i>	198	<i>P</i>	
	4 A 4	920	0.30	267	194	<i>P</i>	197	<i>P</i>	
Building Research Station (ref 7)	7 A 3	1600	0.30	480	154	<i>P</i>	202	<i>P</i>	
	6 A 1	1070	0.28	300	263	<i>P</i>	202	<i>P</i>	
	6 A 2	1070	0.28	289	169	<i>P</i>	199	<i>P</i>	
	10 A 1	2510	0.28	653	202	<i>P</i>	217	<i>P</i>	
	10 A 2	2510	0.28	703	215	<i>P</i>	219	<i>P</i>	
	9 A 1	1670	0.28	468	191	<i>P</i>	216	<i>P</i>	
	4 B 1	880	0.50	449	158	<i>P</i>	218	<i>P</i>	
	6 B 1	1180	0.45	531	221	<i>P</i>	221	<i>P</i>	
	10 B 7	2620	0.40	968	335	<i>P</i>	227	<i>P</i>	
	10 B 2	2420	0.50	1234	225	<i>P</i>	233	<i>P</i>	
	3 A 1	615	0.35	215	188	<i>P</i>	177	<i>P</i>	
	3 B 3	590	0.45	265	211	<i>P</i>	203	<i>P</i>	
	11 A 1	307	0.25	89	()	<i>F</i>	93	<i>F</i>	
	11 B S	293	0.48	141	()	<i>F</i>	181	<i>F</i>	

3.2 Comparación con los métodos de cálculo propuestos

El procedimiento general propuesto se aplicó a la determinación del comportamiento y momento de falla de los especímenes ensayados en los programas experimentales descritos. Los resultados se muestran en la tabla 1. En la fig 6 se comparan las curvas momento-rotación calculadas con las experimentales para un caso en que el pandeo ocurrió antes de la fluencia y otro en el que este ocurrió después de la fluencia.

Al analizar los resultados experimentales se observó que no parecía haber diferencia en los momentos de pandeo de vigas ensayadas con modalidades de carga que daban lugar a distintas distribuciones de momentos en la viga. Por tanto, la constante k_1 que teóricamente toma en cuenta este efecto se tomó en todos los casos igual con uno.

En algunos ensayos no se contaba con todos los datos necesarios para la aplicación del procedimiento general de cálculo del momento de pandeo, por tanto algunos de estos datos se dedujeron indirectamente a partir de la información proporcionada (por ejemplo, el momento de fluencia).

La concordancia entre los momentos de falla experimentales y calculados puede considerarse excelente.

El modo de falla se predijo correctamente en todos los casos. La relación entre el momento experimental y el calculado tuvo una media de 1.00 y un coeficiente de variación de 8.8 por ciento.

Para la determinación del valor de A para el procedimiento aproximado propuesto, en la misma tabla 1 se expresan los resultados experimentales en términos del parámetro adimensional $M_{cr}L/b^3df'_c$; al examinar los resultados de los distintos ensayos, se aprecia que a pesar de que sus valores varían en un intervalo relativamente amplio, la media para cada programa experimental se mantiene aproximadamente constante, con excepción de los ensayos de Massey, especialmente en los especímenes doblemente reforzados.

En estos ensayos el hecho de que las secciones fuesen sobrerreforzadas seguramente dio lugar a que la rigidez en flexión fuese mucho mayor que la de los otros especímenes y se obtuvieran momentos de pandeo netamente superiores. Al eliminar los ensayos de Massey, ya que no se admite en la mayoría de los reglamentos de diseño el empleo de secciones sobrerreforzadas, se

obtiene para el parámetro mencionado un valor promedio de 200 con un coeficiente de variación de 0.14 que implica una dispersión relativamente pequeña en vista de la sobresimplificación del problema. Según el procedimiento general de cálculo, el parámetro $M_{cr}L/b^3df'_c$ debería variar sensiblemente con la cuantía de refuerzo de tensión y también con el nivel de esfuerzos por flexión al que ocurre el pandeo; sin embargo, en los resultados experimentales no se encontró una correlación significativa entre estas variables que justificara la complicación que representa tomar en cuenta su efecto en la ecuación para el cálculo del momento de pandeo. Por tanto, se propone como expresión para la predicción del momento crítico de pandeo lateral la siguiente:

$$M_{cr} = 200 \frac{b^3 df'_c}{L} \quad (4)$$

en la que se ha hecho la suposición conservadora de que $\omega = 1$.

4. EFECTO DE OTRAS VARIABLES EN EL PANDEO LATERAL

4.1 Efecto del flujo plástico

El flujo plástico del concreto bajo esfuerzos permanentes da lugar a una reducción en la rigidez de los elementos que debe afectar el momento crítico de pandeo lateral. No se han encontrado ensayos para estudiar el problema del pandeo lateral bajo cargas permanentes. Para estudiar el problema podría emplearse el método paso a paso descrito anteriormente, considerando una relación esfuerzo—deformación para el concreto modificada por la permanencia de la carga como la propuesta por Rusch (ref 9).

En vista de los resultados satisfactorios obtenidos al emplear el método simplificado, se prefirió modificar la ec 4 para tomar en cuenta este efecto.

Puede considerarse que la permanencia de la carga reduce en la misma proporción la rigidez a flexión y a torsión y que esta reducción es igual a la que se considera para el cálculo de deflexiones de vigas bajo cargas de larga duración. A partir del análisis de los resultados experimentales realizados por Yu y Winter (ref 10), el reglamento **ACI**—1971 propone que se considere un incremento en las deformaciones “elásticas” debido a la permanencia de la carga igual con

$$2 - 1.2 A'_s / A_s$$

siendo A'_s y A_s , respectivamente, el área de refuerzo de compresión y de tensión.

Lo anterior sugiere que para considerar el efecto de la permanencia de la carga, el momento crítico de pandeo se reduzca dividiéndolo entre el factor

$$1 + (2 - 1.2 A'_s / A_s) \beta_d$$

en que β_d es la relación entre el momento flexionante debido a la acción de la carga permanente y el debido a la carga total.

El criterio aquí propuesto es muy similar al adoptado por el Reglamento **ACI**—71 para tomar en cuenta el efecto de la permanencia de la carga en los efectos de esbeltez en columnas.

4.2 Necesidad de comportamiento dúctil

Si se requiere que la viga tenga una falla dúctil, no basta con asegurar que no ocurra pandeo lateral antes que se alcance el momento de fluencia, sino que hay que procurar que se desarrolle toda la ductilidad del elemento, o sea que la falla ocurra cuando el concreto llegue a su deformación de aplastamiento sin que haya habido problemas de pandeo lateral en la etapa de fluencia.

Como se aprecia claramente en la fig 5, el momento de pandeo disminuye bruscamente al ocurrir la fluencia del acero de tensión. Para vigas doblemente reforzadas ocurre otra disminución brusca cuando fluye el refuerzo de compresión. Aparte de estas dos discontinuidades hay una reducción continua del momento de pandeo con el nivel de esfuerzos por flexión.

Considerando que el factor de ductilidad máximo que normalmente se trata de lograr en estructuras de concreto es del orden de 4, se estudió la relación entre el momento de pandeo calculado antes de la fluencia y el calculado para una deformación igual a cuatro veces la de la fluencia. Para una amplia gama de cantidades de refuerzo se encontró que esta relación vale aproximadamente dos. Por tanto, se propone que cuando se requiera un comportamiento dúctil se aplique al momento de pandeo calculado con la ec 4 un factor reductivo de 0.5.

4.3 Efecto de la carga axial

La solución al problema del pandeo lateral de un elemento de material homogéneo y elástico sujeto a una carga axial y a un momento flexionante constante, la obtiene Timoshenko (ref 11) en la forma

$$M_{crp} = \frac{M_{cr}}{\sqrt{1 + \frac{P G J}{M_{cr}^2}}} \quad (4)$$

siendo M_{cr} el momento de pandeo calculado sin tomar en cuenta el efecto de la carga axial y M_{crp} el calculado considerando el efecto de la carga axial actuante, P .

La expresión puede describirse como

$$M_{crp} = M_{cr} \left(1 - \frac{P}{P_e} \right)^{1/2} \quad (5)$$

Su aplicabilidad es dudosa en el caso de comportamiento inelástico.

En el diseño de estructuras de acero, para tomar en cuenta el efecto combinado de flexión y carga axial para distintos tipos de falla, se recurre a fórmulas de interacción de las cuales la más general es

$$\frac{M}{M_o (1 - P/P_e)} + \frac{P}{P_o} = 1$$

en que P_o y M_o son la carga axial y el momento flexionante resistentes calculados sin tomar en cuenta la interacción, según el tipo de falla que rija (resistencia, pandeo por flexión, pandeo lateral o torsional, etc). La validez de esta expresión ha sido comprobada ampliamente aun fuera del rango elástico. Según ella, la reducción en el momento resistente por efecto de carga axial es mucho más drástica que la que predice la expresión elástica (ec 4).

En el manual del Column Research Council (ref 12) se afirma que, cuando rige el pandeo lateral y el efecto de la carga axial es pequeño comparado con el de flexión y el momento flexionante es aproximadamente constante a lo largo de la pieza, se obtienen resultados satisfactorios al ignorar la amplificación del momento por efectos de segundo orden y empleando la expresión

$$\frac{M}{M_{cr}} + \frac{P}{P_o} = 1$$

o sea, que el momento de pandeo lateral resulta

$$M_{crp} = M_{cr} \left(1 - \frac{P}{P_o} \right) \quad (6)$$

En elementos de sección delgada, la falla por el efecto de la carga axial puede ser debida a compresión en el material o a pandeo alrededor del eje débil. La falla por compresión en el material rara vez es crítica en elementos en que puede haber problemas de pandeo lateral.

La carga axial de pandeo vale

$$P_e = \frac{\pi^2 E I_y}{(k_3 L)^2}$$

El cálculo de la carga axial crítica requiere de la determinación de la rigidez flexionante (producto $E I_y$), para lo cual valen las mismas observaciones hechas al tratar el momento de pandeo lateral.

No se conocen resultados experimentales en elementos de concreto sujetos a flexocompresión con falla por pandeo lateral; por tanto, los criterios de cálculo mencionados no pueden ser comprobados. Sin embargo, con base en los estudios sobre elementos de acero, es probable que la ec 6 proporcione resultados aceptables.

5. RECOMENDACIONES PARA LA REVISION DEL PANDEO EN VIGAS

5.1 Momento crítico de pandeo lateral

En el diseño habrá que revisar que la capacidad de los elementos estructurales no esté regida por pandeo lateral. En forma general, esto puede hacerse revisando que el factor de seguridad contra pandeo sea mayor que contra falla por flexión o por cortante; también puede hacerse limitando las dimensiones y el refuerzo de las secciones a valores que aseguren que el comportamiento del elemento esté regido por flexión.

Se ha demostrado que el momento crítico de pandeo puede predecirse con razonable aproximación con una expresión del tipo

$$M_{cr} = \frac{A b^3 d f'_c}{L}$$

El valor de A que deberá emplearse para diseño dependerá del factor de seguridad requerido, del tipo de carga y de apoyo, de la duración de la carga y de las necesidades de ductilidad. Cuando las cargas sean de corta duración y no haya necesidades particulares de ductilidad, el valor se puede deducir directamente del análisis de los resultados experimentales, del que se obtuvo para dicho parámetro una media de 200 y un coeficiente de variación de 0.14.

Para fines de diseño suelen emplearse expresiones que proporcionan un valor de la resistencia que tenga una probabilidad pequeña de no ser alcanzado. Si se fija el nivel de probabilidad, como es usual, en 5 por ciento, el valor reducido de A puede estimarse, suponiendo una distribución normal de probabilidades, como

$$A^* = \bar{A} (1 - 1.65 C_A)$$

siendo $\bar{A}$ la media de la muestra y C_A su coeficiente de variación; en este caso

$$A^* = 200 (1 - 1.65 \times 0.14) \approx 150$$

El momento resistente para falla por pandeo lateral se determinará por tanto como

$$M_{cr} = 150 \frac{b^3 d f'_c}{L} \quad (7)$$

A este valor deberán aplicarse todavía los factores de seguridad adicionales que fije el reglamento (factor de reducción de resistencia, ϕ , según el ACI).

Para otras condiciones se emplearán los factores correctivos propuestos en el cap 3, o sea

a) para tomar en cuenta el flujo plástico en caso de cargas sostenidas se multiplicará por el factor

$$C_1 = \frac{1}{1 + (2 - 1.2 A'_s/A_s) \beta_d}$$

b) si se quiere que el elemento desarrolle ductilidad antes de la falla, se multiplicará por 0.5 el valor obtenido de la ec 7.

c) si el elemento está sujeto a una carga axial, P , de compresión, se multiplicará por el factor

$$C_3 = 1 - \frac{P}{P_o}$$

La notación empleada en las expresiones anteriores se explica en el cap 4.

5.2 Dimensiones límites para vigas

Se obtendrán expresiones que proporcionen límites para las dimensiones y el refuerzo del elemento, abajo de los cuales se asegure que el elemento alcanzará su capacidad por flexión sin problemas de pandeo.

Se pretende que se cumpla

$$M_y \leq M_{cr}$$

o sea, que el momento de fluencia de la sección crítica por flexión sea menor que el momento que causa el pandeo lateral del elemento.

Para secciones subreforzadas, simple o doblemente armadas, el momento de fluencia puede determinarse con una aproximación muy razonable, como

$$M_y = 0.9 A_s f_y d$$

Empleando para M_{cr} la ec 7, la desigualdad anterior resulta

$$0.9 A_s f_y d \leq \frac{150 b^3 d f'_c}{L}$$

que puede reagruparse como

$$q = \frac{A_s f_y}{b d f'_c} \leq \frac{150}{0.9} \frac{b^2}{L d}$$

o sea

$$\frac{L d}{b^2} q \leq 170 \quad (8)$$

Se observa que el parámetro que debe limitarse no es simplemente L/b , o b/d , como hacen la mayoría de los reglamentos. El hecho de que el parámetro $\frac{L d q}{b^2}$ sea el que debe limitarse, queda confirmado por los resultados experimentales; en la fig 7 se aprecia cómo en función de este parámetro se distinguen los especímenes en los que se obtuvo falla por pandeo antes de alcanzar la fluencia de los que se alcanzó el momento de fluencia. El valor crítico de $\frac{L d}{b^2} q$ que separa los dos tipos de falla es de alrededor de 200, lo cual confirma que el límite de la ec 8 es ligeramente conservador.

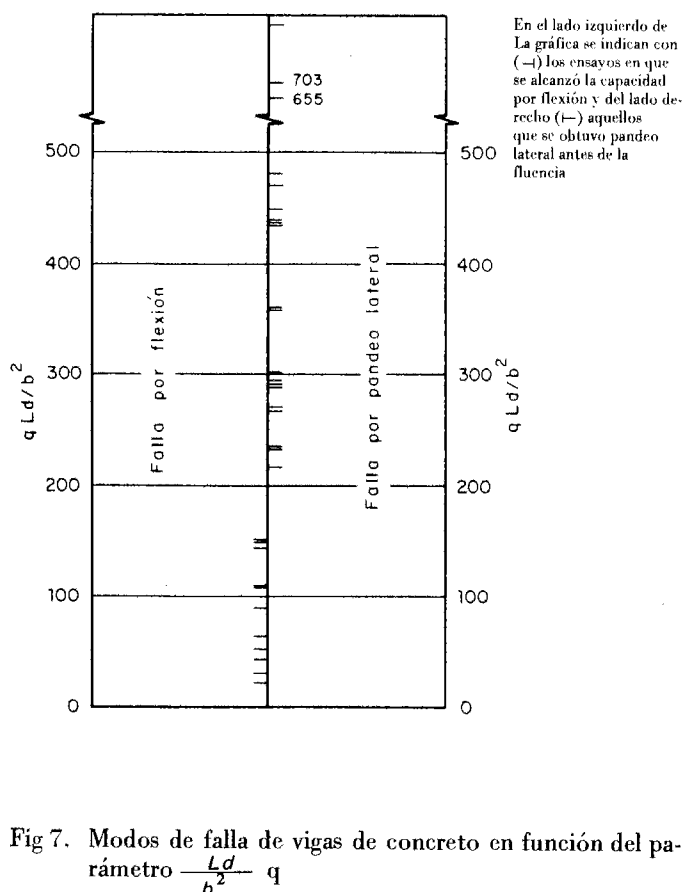


Fig 7. Modos de falla de vigas de concreto en función del parámetro $\frac{Ld}{b^2} q$

Para tomar en cuenta los efectos del flujo plástico y de las necesidades de ductilidad, puede afectarse directamente el límite obtenido por los factores de reducción respectivos indicados en el inciso anterior. Para simplificar las recomendaciones se propone tomar un factor de reducción único para considerar el efecto del flujo plástico, que es el que se obtiene considerando las relaciones típicas:

$A'_s = 0.5A_s$, y $\beta_d = 2/3$ (carga permanente igual a dos terceras partes de la total); con lo cual se obtiene

$$C_2 = 0.5$$

y por tanto la limitación resulta

$$\frac{Ld}{b^2} q \leq 85 \quad (9)$$

Considerando que las necesidades de desarrollar grandes ductilidades están asociadas generalmente a cargas de tipo accidental (p.e.sismo), no es necesario considerar la reducción por este efecto en forma adicional a la debida a la permanencia de las cargas. En vista de que el factor reductivo propuesto por ductilidad también vale 0.5, se obtiene para asegurar comportamiento dúctil la misma limitación que la ec 9, la cual, por tanto, puede proponerse en forma general.

Tratando de comparar las limitaciones propuestas por los reglamentos vigentes con las aquí obtenidas, puede hacerse la simplificación de que la relación claro a peralte de vigas es normalmente del orden de 10; suponiendo este valor, la ec 9 se transforma en

$$L/b \leq \sqrt{\frac{850}{q}}$$

La limitación del ACI - 71 de que $L/b \leq 50$ equivale a la aquí propuesta cuando $q = 0.34$ que constituye una cuantía de refuerzo muy alta para vigas de concreto; tal limitación resulta por tanto excesivamente conservadora para los casos más usuales.

Al examinar la ec 9 se concluye que para cantidades altas de refuerzo puede ser crítico el pandeo lateral (por ejemplo una viga de 10 m de claro, 1 m de peralte, 0.2 m de ancho y 1.5 por ciento de refuerzo de acero grado duro queda en el límite de lo permisible).

Lo anterior es válido para vigas simplemente apoyadas y resulta conservador para vigas continuas en sus apoyos.

6. CONSIDERACIONES SOBRE EL PROBLEMA DE PANDEO EN MUROS DE CORTE

En edificios altos los muros de corte funcionan esencialmente como elementos de flexión. El nivel de carga axial al que están sujetos suele ser relativamente pequeño y, para relaciones altura a longitud del muro mayores de 2.5, las deformaciones de cortante son despreciables. Frecuentemente existen arreglos de muros en planta que dan lugar a secciones transversales en cajón, en I o en L, pero muchas veces los muros de corte tienen sección rectangular sin elementos que los rigidicen transversalmente. Estas secciones resultan muy esbeltas para trabajar en flexión, ya que pueden tener longitudes muy apreciables (especialmente en muros de lindero) y espesores pequeños. En este último caso puede ser crítico el pandeo lateral por efecto combinado del momento flexionante y la carga axial.

El problema se ilustra en la fig 8. Los sistemas de piso proporcionan generalmente restricciones a la deformación lateral, debido a la presencia de muros en dirección transversal a la del muro en estudio. La longitud de pandeo es, por tanto, la altura de entrepiso. Existe además casi siempre cierta restricción a la rotación proporcionada por la rigidez de los sistemas de entrepiso, por lo cual la longitud efectiva de pandeo lateral es menor que la del entrepiso.

No se ha encontrado algún estudio teórico o experimental de este problema en muros de concreto. Se tratará aquí de obtener alguna indicación sobre este caso, extrapolando los resultados encontrados para vigas.

Si se aplica la fórmula de interacción propuesta anteriormente, ec 6,

$$M_{cp} = M_{cr} \left(1 - \frac{P}{P_{cr}} \right)$$

P_{cr} es la carga crítica de pandeo alrededor del eje débil que según la teoría elástica vale

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{(k_3 L)^2}$$

$k_3 L$ representa la longitud efectiva de pandeo.

La determinación de P_{cr} se enfrenta nuevamente a la dificultad de estimar el producto EI_y por el comportamiento inelástico del concreto. El procedimiento paso a paso propuesto para determinar la relación momento-curvatura y el momento de pandeo puede emplearse también en este caso.

prexión semiempírica obtenida para vigas (ec 7), y estimar la carga de pandeo, P_{cr} , utilizando para el cálculo del término EI_y la expresión propuesta por el ACI - 71 para columnas de concreto

$$EI = \frac{E_t I_g}{2.5 (1 + \beta_d)}$$

en que E_t es el módulo tangente del concreto, I_g el momento de inercia de la sección bruta de concreto y β_d la relación entre la carga permanente y la carga total.

Para el módulo de elasticidad del concreto podría emplearse alguna de las expresiones propuestas por los reglamentos: por ejemplo, la del Distrito Federal: $E_t = 10,000 \sqrt{f'_c}$, o la del ACI: $E_t = 1000 f'_c$ para concreto de peso volumétrico normal.

Por ejemplo, con el fin de observar a partir de qué valores de las dimensiones y el refuerzo el pandeo lateral puede ser crítico en muros, tómese $E_t = 1000 f'_c$, $\beta_d = 1$ (valor conservador) y $k_3 = 0.75$ (para considerar el empotramiento parcial del sistema de piso). Empleando la ec 7 para el momento crítico en vigas, la fórmula de interacción resulta

$$\begin{aligned} M_{cp} &= \frac{75 b^3 d f'_c}{k_3 L} \left(1 - \frac{P L^2}{326 b^3 d f'_c} \right) \\ &= \frac{100 b^3 d f'_c}{L} \left(1 - \rho \frac{L^2}{326 b^2} \right) \end{aligned}$$

siendo $\rho = \frac{P}{b d f'_c}$ y considerando $d/t = 0.9$

Se quiere que el momento de pandeo resulte mayor que el momento resistente en flexocompresión; este último para secciones con refuerzo simétrico concentrado en los extremos y para carga axial pequeña, puede calcularse en forma aproximada como

$$M_y = 0.9 A_s f_y d + \frac{P t}{2} (1 - \rho)$$

Planteando la desigualdad

$$\begin{aligned} 0.9 A_s f_y d + \frac{P d}{1.8} (1 - \rho) &\leq 100 \frac{b^3 d f'_c}{L} - \\ &- 0.31 b d L f'_c \rho \end{aligned}$$

dividiendo entre $b d^2 f'_c$

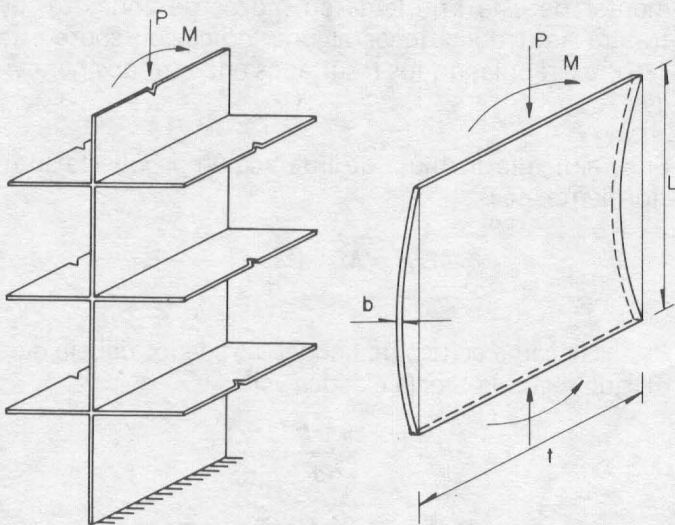


Fig 8. Pandeo de muros por flexocompresión

Una forma más simplista consiste en calcular el momento de pandeo debido a flexión (M_{cr}) con la ex-

$$0.9 q + 0.56 \rho (1 - \rho) \leq 100 \frac{b^2}{L d} - 0.31 \frac{L}{d} \rho$$

$$\left(\frac{L}{b} \right)^2 \leq \frac{100}{0.9 q \frac{d}{L} + 0.56 \rho (1 - \rho) \frac{d}{L} + 0.31 \rho}$$

La solución para intervalos típicos de las variables se presenta en la fig 9, de la que se deduce que los requisitos de pandeo pueden regir la elección del espesor de muros de sección rectangular. Por ejemplo, para un muro de concreto de $f'_c = 200 \text{ g/cm}^2$, $f_y = 4000 \text{ cm}^2$, con 1 por ciento de refuerzo en cada extremo, una altura de entrepiso de 3 m y una longitud de 6 m, el espesor mínimo para evitar problema de pandeo resulta ser 18 cm si no hay carga vertical y 23 cm si la carga vertical produce un esfuerzo normal de $0.2 f'_c$.

Los cálculos anteriores se presentan únicamente para evidenciar que el problema merece un estudio experimental para comprobar o modificar algunas de las hipótesis poco justificadas hechas en este desarrollo.

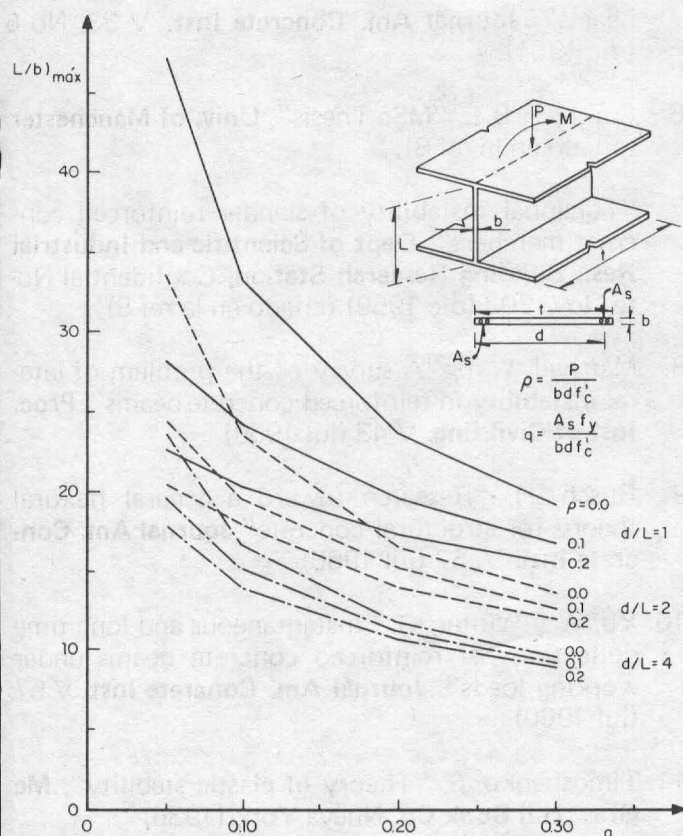


Fig 9. Dimensiones límite de muros por pandeo lateral

7. CONCLUSIONES

Cuando hay problemas de inestabilidad lateral, el comportamiento de vigas de concreto puede predecirse con bastante aproximación, obteniendo la relación momento-curvatura de la sección de la viga y sustituyendo en la expresión elástica para el cálculo del momento de pandeo lateral el módulo de elasticidad secante del concreto en compresión y el momento de inercia de la sección agrietada.

El momento resistente en pandeo lateral de una viga disminuye continuamente al aumentar el nivel de esfuerzos, debido a la disminución en el módulo de elasticidad del concreto y al progresivo agrietamiento. Si se presenta la fluencia del refuerzo el momento de pandeo se reduce bruscamente por la pérdida de la contribución del refuerzo a la rigidez de la sección.

Una expresión aproximada para predecir el momento de pandeo cuando este ocurre antes de la fluencia del refuerzo es la siguiente

$$M_{cr} = \frac{A b^3 d f'_c}{L}$$

En que A se tomará como 200 para obtener un valor medio de la resistencia y 150 si se quiere un valor conservador para fines de diseño.

En el texto se dan criterios para corregir el momento de pandeo cuando se quiere evitar que el pandeo lateral ocurra aun después de la fluencia del refuerzo, cuando haya que tomar en cuenta el efecto de la permanencia de la carga y cuando existan esfuerzos de compresión en el elemento.

Para asegurar en el diseño que no habrá problemas por pandeo lateral, puede revisarse que el momento actuante sea menor que el de pandeo calculado o también revisar que las dimensiones de la viga y su refuerzo sean tales que la capacidad esté regida por flexión y no por pandeo. Se obtiene la limitación siguiente

$$\frac{L d}{b^2} q \leq 85$$

La limitación obtenida implica que solo en caso de cuantías de refuerzo muy altas puede haber problemas por pandeo para elementos de proporciones usuales.

Se hacen algunas consideraciones sobre el pandeo lateral de muros de concreto, llegando a la conclusión que puede ser crítico en muros muy largos de sección rectangular y que deban soportar momentos flexio-

nantes de importancia, Se sugiere un estudio experimental para confirmar la hipótesis en que se basan los cálculos al respecto.

RECONOCIMIENTO

Este trabajo fue elaborado en el Departamento de Materiales de la Universidad Autónoma Metropolitana—Azcapotzalco, con el cual el autor colaboró en 1974—1975.

Se agradece a Emilio Rosenblueth y a Oscar de Buen la revisión crítica del manuscrito, y las valiosas sugerencias para el mejoramiento del mismo.

8. REFERENCIAS

1. Bleich, F, "Buckling strength of metal structures", **Mc Graw Hill Book Co.**, Nueva York (1952)
2. Hansell, W y Winter, G, "Lateral stability of reinforced concrete beams", **Journal Am. Concrete Inst.** V31, No 3 (sep 1959)
3. Mc Guire, W, "Steel structures", **Prentice Hall Inc.** Engl. Cliff, Nueva Jersey (1968)
4. Massey, C, "Lateral instability of reinforced concrete beams under uniform bending moments", **Journal Am. Concrete Inst.** V 64, No 3 (mar 1967)
5. Sant, J K y Bletzacker, R W, "Experimental study of the lateral stability of reinforced concrete beams". **Journal Am. Concrete Inst.** V 33, No 6 (dic 1961)
6. Smith, R B L, "MSc Thesis", **Univ. of Manchester** (citado en la ref 8).
7. "Torsional instability of slender reinforced concrete members", **Dept of Scientific and Industrial Res., Building Research Station**, Confidential Note No C 702 (dic 1959) (citado en la ref 8)
8. Marshall, W T, "A survey of the problem of lateral instability in reinforced concrete beams", **Proc. Inst of Civil Eng.** V 43 (jul 1969)
9. Rusch, H, "Research toward a general flexural theory for structural concrete" **Journal Am. Concrete Inst.** V. 57 (jul 1960)
10. Yu, W y Winter, G, "Instantaneous and long time deflections of reinforced concrete beams under working loads", **Journal Am. Concrete Inst.** V 57 (jul 1960)
11. Timoshenko. S, "Theory of elastic stability", **Mc Graw Hill Book Co.** Nueva York (1936)
12. Johnston, B G, (editor), "Column research council guide to design criteria for metal compression members", **J. Wiley** (1960)