



Universidad Nacional
Autónoma de México



**Instituto
De
Ingeniería**
82

Pandeo lateral de vigas de acero

Oscar de Buen

Octubre de 1963

82

Pandeo Lateral de Vigas de Acero

Oscar DE BUEN *

INTRODUCCION

Consideremos una armadura sometida a flexión pura, bajo la acción de pares iguales en magnitud y de sentido contrario aplicados en sus extremos y apoyada de tal manera que estos pueden girar libremente alrededor de los ejes x y y pero estén impedidos de hacerlo alrededor del eje z .

La cuerda superior estará trabajando a compresión y la inferior a tensión, así que la primera se encuentra en condiciones semejantes a las de una columna cargada axialmente.

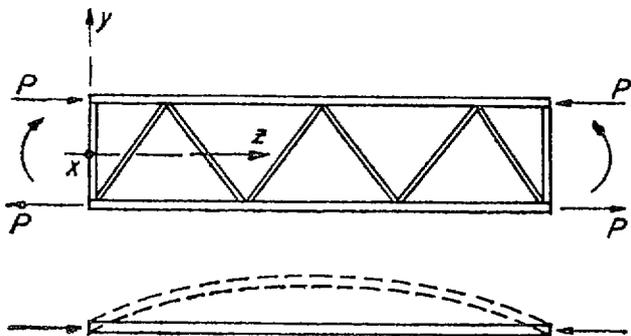


FIGURA 1

Si los momentos M , y por consiguiente las cargas P , crecen, llega un instante en que el equilibrio de la cuerda superior se vuelve inestable y ésta se pandea lateralmente; la cuerda inferior, sometida a tensión, trata de conservarse recta, lo cual retrasa, pero no impide, el pandeo de la cuerda comprimida; su influencia variará directamente con la rigidez de los elementos que ligan las dos cuerdas e inversamente con el peralte de la armadura.

Este mismo fenómeno se presenta en todos los casos de piezas sometidas a flexión, complicado, cuando se trate de elementos de alma llena, por la mayor liga existente entre los dos patines, que hace que aumente la influencia de cada uno de ellos sobre el comportamiento del otro.

Cualquier viga apoyada en sus extremos y cargada en el plano del alma puede pandearse lateralmente, excepto cuando existan elementos exteriores que impidan ese fenómeno. Si el momento de inercia de sus secciones transversales respecto al eje principal normal al plano del alma es considerablemente mayor que el correspondiente al otro eje principal, el pandeo lateral y el colapso de la viga pueden presentarse mucho antes de que los esfuerzos normales debidos a la flexión alcancen el límite de fluencia.

Mientras las cargas que actúan en el plano del alma permanecen por debajo de una cierta intensidad, el equilibrio de la estructura es estable, de manera que si se obliga a la viga a adoptar una configuración ligeramente flexionada lateralmente, por medio de la aplicación de un agente externo, recupera su configuración plana de equilibrio al desaparecer este. Sin embargo, al aumentar la intensidad de las cargas, llega un momento en que se hace posible una forma de equilibrio deformada lateralmente y retorcida, además de la forma plana; la carga menor para la que puede presentarse esta segunda forma de equilibrio es la carga crítica de la estructura.

Con objeto de obtener secciones económicas para ser empleadas como vigas, la mayor parte de los perfiles de acero utilizados para trabajar a flexión se fabrican con momentos de inercia grandes respecto a uno de sus ejes principales, y pequeños respecto al otro, y por sí solos ofrecen pequeña resistencia al pandeo lateral.

PANDEO LATERAL DE VIGAS DE SECCION TRANSVERSAL RECTANGULAR

Consideremos una viga recta, de sección transversal rectangular, flexionada en su plano de mayor resistencia por la acción de dos pares iguales y de sentido contrario aplicados en sus extremos; éstos están soportados verticalmente e impedidos de girar alrededor del eje longitudinal de la viga, pero pueden hacerlo libremente alrededor de cualquiera de sus dos ejes principales.

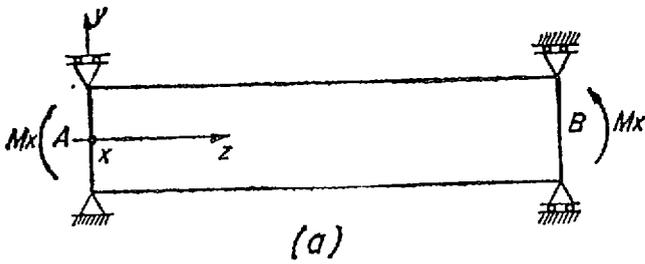
Haremos, además, las suposiciones adicionales siguientes.

1. La sección transversal de la viga es constante.
2. Los esfuerzos normales máximos debidos a la carga exterior están en el rango elástico cuando se produce el pandeo.
3. La deformación de la viga al flexionarse y retorcerse es de tal naturaleza que no cambia la forma de sus secciones transversales.
4. Las cargas exteriores permanecen paralelas a sus direcciones originales al desplazarse sus puntos de aplicación.

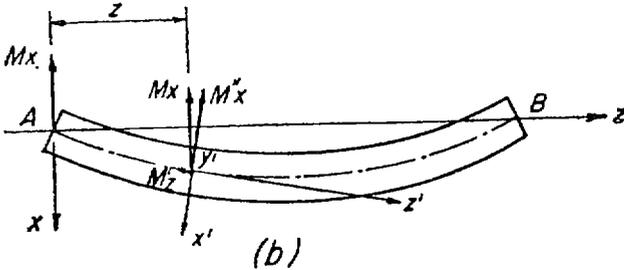
La fig. 2 representa la viga en estudio.

Al presentarse el pandeo lateral, una sección transversal cualquiera situada a una distancia z

* Profesor de estructuras, División Profesional y División del Doctorado, Facultad de Ingeniería, UNAM.



Los extremos A y B pueden girar libremente alrededor de los ejes xy y pero no alrededor de z .



Vista del patin superior

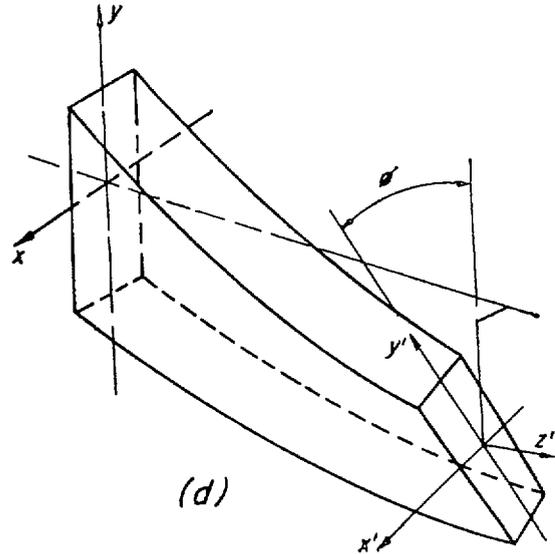
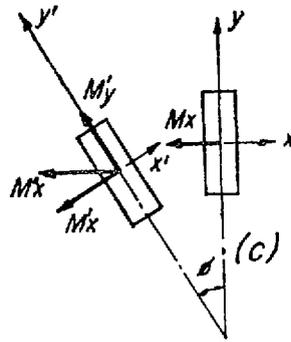


FIGURA 2

del origen se desplaza lateralmente y gira, como se indica en las figs. 2b, c y d; el vector M_x , que representa el momento flexionante en la sección considerada y estaba alojado sobre el eje x de la misma antes de la deformación, permanece paralelo a su dirección original; al cambiar la orientación de los ejes principales de la sección el vector deja de ser paralelo a éstos, dando lugar a que aparezcan momentos alrededor de los tres nuevos ejes de referencia, x' , y' y z' .

Por consiguiente, cuando el momento aplicado alrededor del eje de mayor momento de inercia alcanza su valor crítico y se presenta una configuración deformada lateralmente, el equilibrio exige que aparezcan un momento de flexión alrededor del eje de menor momento de inercia y un momento de torsión, es decir, el pandeo está siempre asociado con flexión lateral y torsión.

Las curvaturas del eje deformado de la viga son d^2y'/dz^2 y d^2x'/dz^2 , siempre que las deflexiones sean tan pequeñas que podamos despreñar los cuadrados de las primeras derivadas, suposición semejante a la que se hace al resolver problemas de flexión de vigas. Si, además, el ángulo de torsión ϕ es pequeño, podemos suponer que las curvaturas en los planos yz y xz son iguales que en los planos $y'z'$ y $x'z'$, respectivamente, luego podemos escribir

$$EI_y \frac{d^2y}{dz^2} = M'_y \tag{1}$$

$$EI_x \frac{d^2x}{dz^2} = M'_x \tag{2}$$

El ángulo de giro $d\phi$ correspondiente a la longitud dz está dado por la expresión

$$d\phi = M'_z dz / GJ,$$

en la que M'_z es el momento de torsión y GJ la rigidez a la torsión de la pieza. Por consiguiente, podemos escribir

$$GJ \frac{d\phi}{dz} = M'_z \tag{3}$$

Las ecuaciones diferenciales 1, 2 y 3 son las ecuaciones de equilibrio de la viga pandeada y a partir de ellas puede encontrarse el valor crítico del momento. Son también válidas para otras condiciones de carga, siempre que estas sean de tal naturaleza que la flexión original se produzca alrededor del eje de mayor momento de inercia.

Para el caso de la viga de sección rectangular sometida a flexión pura la solución de las ecs. 1, 2 y 3 nos lleva al resultado siguiente^{1,6}

$$M_{cr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EI_y GJ} \quad (4)$$

Para rectángulos angostos, J puede obtenerse con suficiente precisión mediante la fórmula

$$J = \frac{1}{3} b^3 h$$

El momento crítico para una viga de sección transversal rectangular sometida a cualquier tipo de carga puede calcularse con la expresión

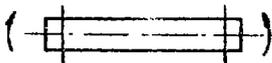
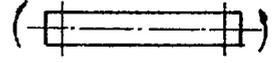
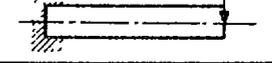
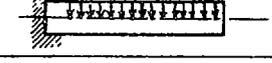
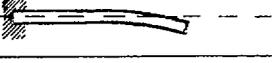
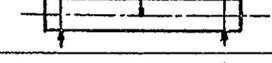
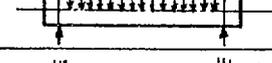
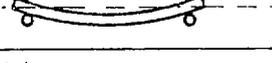
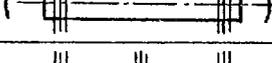
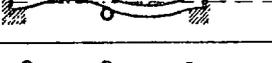
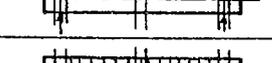
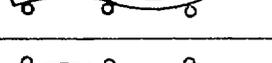
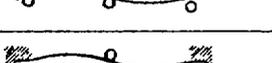
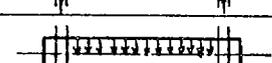
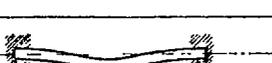
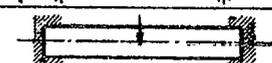
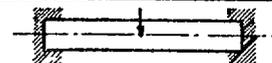
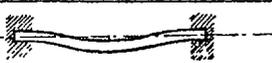
$$M_{cr} = \frac{m}{l} \sqrt{EI_y GJ} \quad (5)$$

En la tabla I se dan los valores del coeficiente m para distintas condiciones de carga y apoyo. Puesto que ningún valor de m es menor que π , obtendremos resultados del lado de la seguridad si utilizamos la ec. 4 para cualquiera de los casos incluidos en la tabla. Debe tenerse en cuenta, sin embargo, que, con excepción de los casos 1 y 2, los valores de m anotados en la tabla son correctos únicamente si las cargas actúan en el eje centroidal de la viga; de la observación de la fig. 2d es evidente que si las cargas verticales se aplican en el borde superior de la viga aumenta la tendencia de ésta a retorcerse, mientras

Tabla I - Efecto de la carga y de las condiciones de apoyo en la estabilidad lateral de vigas de sección transversal rectangular angosta.

$$M_{cr} = \frac{m}{l} \sqrt{EI_y GJ}$$

l = claro total, en todos los casos

Caso	Vista lateral	Vista por el patin superior	m
1			3.14
2			6.28
3			4.01
4			6.43
5			4.23
6			3.54
7			9.22
8			11.12
9			8.24
10			13.1
11			6.5
12			5.4
13			5.29
14			5.88

que disminuye si se aplican en el patín inferior; por consiguiente, los coeficientes m serán menores que los anotados en la tabla si las cargas están aplicadas arriba del eje centroidal y mayores si se aplican debajo de él.

En la ref. 1 pueden encontrarse valores de m para otras condiciones de carga.

Como en el caso de las columnas, el pandeo de vigas de longitud relativamente corta no soportadas lateralmente, se presenta cuando los esfuerzos máximos han sobrepasado el límite de elasticidad del material. Se viola entonces una de las hipótesis básicas para la obtención de los resultados anteriores los que, por consiguiente, no son válidos para casos de pandeo plástico. De hecho, el problema de la determinación de la carga crítica en estas condiciones no está aún resuelto, aunque se han propuesto muchos métodos aproximados para obtenerla.

De entre ellos, uno de los que permite estimar con mayor precisión el efecto del comportamiento plástico sobre la resistencia de vigas y travesas consiste en suponer que la relación entre las resistencias al pandeo elástico e inelástico es la misma para vigas que para columnas. Por consiguiente, la resistencia de las vigas al pandeo inelástico puede obtenerse utilizando una curva $\sigma_{cr} = l/r$ para columnas^{2,3}.

Por medio de la ec. 5, y utilizando la fórmula de la escuadría, se obtiene el esfuerzo crítico de pandeo elástico para una viga de sección transversal rectangular

$$\sigma_{ce} = \frac{M_{cr}}{S_x} = \frac{m}{IS_x} \sqrt{GJ} EI_y \quad (6)$$

El esfuerzo de trabajo se obtiene dividiendo el calculado con la ec. 6 entre un coeficiente de seguridad.

La expresión anterior es válida únicamente para los casos en que σ_{ce} resulte menor que el esfuerzo del acero en el límite de proporcionalidad, es decir, menor de $\sigma_{y/2}$, de acuerdo con la distribución de esfuerzos residuales aceptada^{2,3}.

VIGAS DE SECCION TRANSVERSAL EN CAJON

La ec. 5, obtenida para secciones transversales rectangulares macizas, puede utilizarse para travesas de sección transversal rectangular en cajón, soldadas o remachadas, del tipo de la indicada en la fig. 3².

La fórmula siguiente permite calcular el valor de J para ese tipo de secciones, con aproximación suficiente para fines de diseño:

$$J = \frac{4b_1^2 d_1^2}{\int_c \frac{ds}{t}} = \frac{2b_1^2 d_1^2}{\frac{b_1}{t_p} + \frac{d_1}{t_a}} \quad (7)$$

En el caso de travesas en cajón de proporciones usuales, el esfuerzo obtenido por medio de la

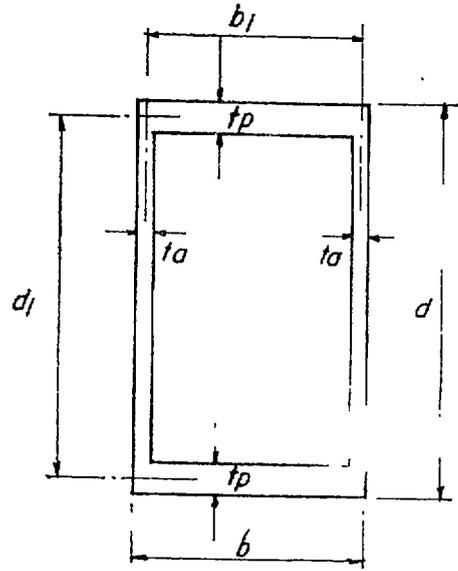


FIGURA 3

ec. 6 es mucho mayor que el correspondiente al límite de proporcionalidad del material, de manera que la falla se presenta por pandeo lateral en el rango inelástico. Para encontrar el esfuerzo crítico en este rango suponemos que la relación existente entre los esfuerzos críticos en los rangos elástico y plástico en columnas cargadas axialmente se conserva en el caso de vigas sometidas a pandeo lateral.

Si en la ecuación 24 de la ref. 3 se introduce el esfuerzo crítico de Euler como un parámetro, se obtiene:

$$\sigma_{cr} = \sigma_y - \frac{\sigma_y^2}{4\sigma_e} = \sigma_y \left(1 - 0.25 \frac{\sigma_y}{\sigma_e} \right) \quad (8)$$

siendo

$$\sigma_e = \pi^2 E / (l/r)^2$$

el esfuerzo crítico de Euler, para pandeo elástico.

De acuerdo con lo que hemos dicho, la ec. 8 es aplicable también al caso de pandeo de vigas, siendo ahora

$$\sigma_e = \frac{m}{S_x l} \sqrt{EI_y GJ}$$

Sustituyendo este valor en (8), y tomando $\mu = 0.3$ y $m = \pi$, obtenemos

$$\sigma_{cr} = \sigma_y \left(1 - 0.128 \frac{S_x \sigma_y l}{E \sqrt{I_y}} \right) \quad (9)$$

Partiendo de esta ecuación, llegamos a los resultados siguientes, aplicables, respectivamente, a aceros A7 y A36

$$\sigma_{cr} = \sigma_y \left(1 - \frac{S_x l}{6865 \sqrt{I_y}} \right) \quad (10)$$

$$\sigma_{cr} = \sigma_y \left(1 - \frac{S_x^2 I}{6293 \sqrt{I_y}} \right) \quad (11)$$

Por último, tomando un coeficiente de seguridad de 1.65, obtenemos

Para acero A7:

$$\sigma_p = 1400 - 0.204 \frac{S_x^2 I}{\sqrt{I_y}} \quad (12)$$

Para acero A36:

$$\sigma_p = 1545 - 0.245 \frac{S_x^2 I}{\sqrt{I_y}} \quad (13)$$

El AISC, en sus últimas especificaciones, indica que las piezas en cajón sometidas a flexión pueden diseñarse sin tener en cuenta ninguna reducción en los esfuerzos permisibles en el patín comprimido por efectos de pandeo lateral suponiendo, por consiguiente, que este fenómeno no tiene ninguna importancia en piezas flexionadas del tipo que estamos considerando⁴.

Esta suposición es correcta para piezas de dimensiones usuales, pero puede dar resultados del lado de la inseguridad para piezas muy aperaltadas y largas por lo que, en estos casos, deberán utilizarse las ecs. 12 ó 13 para obtener los esfuerzos permisibles; con objeto de no llegar nunca a resultados del lado de la inseguridad, en el Proyecto de Reglamento de las Construcciones en el D. F.⁵ se estipula que se tomará $\sigma_p = 0.6\sigma_y$ únicamente en los casos en que la relación claro/ancho sea igual o menor que 30; para relaciones mayores deberán reducirse los esfuerzos permisibles utilizando las fórmulas para secciones I, y si se desean emplear esfuerzos mayores que los dados por esas fórmulas deberá hacerse un estudio teórico que los justifique; para ese estudio se recomienda el empleo de las ecs. 12 y 13.

Un criterio semejante se sigue en las Especificaciones del Instituto Americano del Hierro y el Acero (AISI) para el diseño de perfiles estructurales formados por lámina delgada doblada en frío, en las que se estipula que cuando se empleen secciones en cajón trabajando como vigas no será necesario reducir esfuerzos por pandeo lateral para relaciones claro/ancho menores de 75. (Ref. 15, p. 47).

Desde luego, las fórmulas 10 y 11 serán aplicables únicamente en los casos en que los esfuerzos críticos sean mayores que $\sigma_y/2$; si son menores, se aplicará la ec. 6. Análogamente, (12) y (13) serán válidas únicamente para

$$\sigma_p \geq \frac{\sigma_y}{2 \times 1.65} = \frac{\sigma_y}{3.3}$$

EJEMPLO 1

Calcular los esfuerzos de trabajo para los cuatro casos siguientes, considerando en todos ellos

que la viga está sometida a momentos flexionantes producidos por cargas aplicadas en el plano indicado y despreciando el efecto de las restricciones impuestas por los extremos.

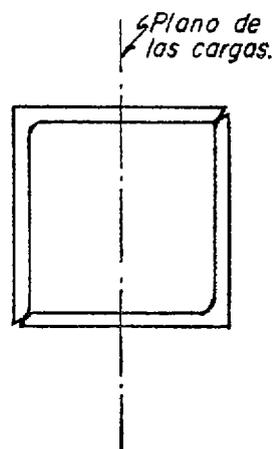


FIGURA 4

1er. caso. Sección formada por dos ángulos de 4" \times 1/4", en cajón; longitud $l = 10$ m. Acero A7 (fig. 4) ($l/b \doteq 100$)

$$S_x = 75.5 \text{ cm}^3; I_y = 383.5 \text{ cm}^4;$$

$$J = 437 \text{ cm}^4.$$

$$\begin{aligned} \sigma_p &= 1400 - 0.204 \frac{75.5 \times 1000}{\sqrt{437 \times 383.5}} = \\ &= 1400 - 38 = 1362 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

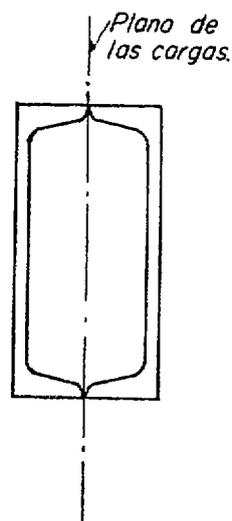


FIGURA 5

2º caso. Sección formada por dos canales de 12" L_{iv} en cajón; $l = 10$ m; Acero A36 (fig. 5) ($l/b \doteq 67$).

$$S_x = 699.8 \text{ cm}^3; I_y = 3116.9 \text{ cm}^4;$$

$$J = 8100 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_p = 1545 - 0.245 \frac{699.8 \times 1000}{\sqrt{3116.9 \times 8100}} =$$

$$= 1545 - 20 = 1525 \text{ kg/cm}^2$$

3º caso. Sección formada por cuatro placas, como se muestra en la fig. 6, $l = 10\text{m}$. Acero A7 ($l/b = 50$)

$$I_x = 575000 \text{ cm}^4; S_x = 11500 \text{ cm}^3;$$

$$I_y = 22800 \text{ cm}^4$$

$$J = \frac{2 \times 19^2 \times 95^2}{\frac{19}{5} + 1.0} = \frac{6\,500\,000}{98.8} =$$

$$= 66000 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_p = 1400 - 0.204 \frac{11500 \times 1000}{\sqrt{66000 \times 22800}} =$$

$$= 1400 - 33.7 = 1366 \text{ kg/cm}^2$$

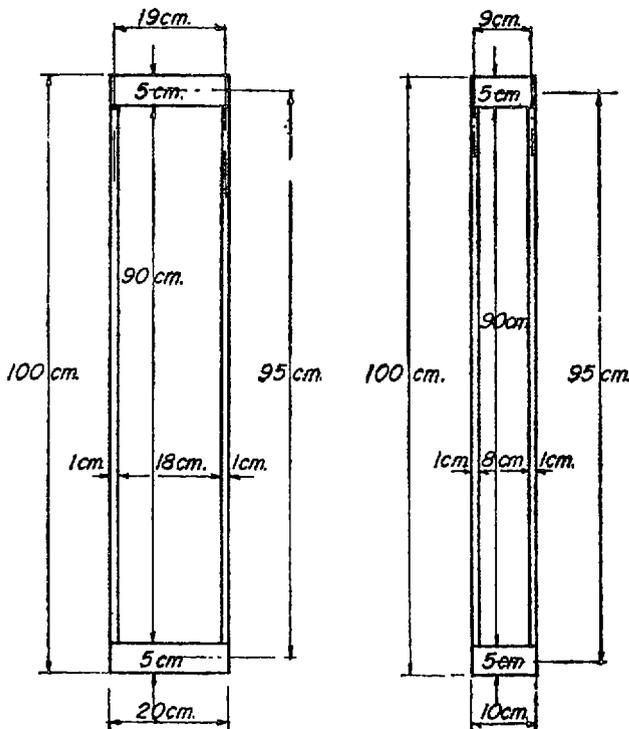


FIGURA 6

FIGURA 7

4º caso. Sección formada por 4 placas, como se muestra en la fig. 7; $l = 10\text{m}$. Acero A36 ($l/b = 100$)

$$S_x = 7020 \text{ cm}^3; I_y = 4530 \text{ cm}^4;$$

$$J = 15100 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_p = 1545 - 0.245 \frac{7020 \times 1000}{\sqrt{15100 \times 4530}} =$$

$$= 1545 - 109 = 1436 \text{ kg/cm}^2$$

De los resultados de estos cuatro ejemplos pueden deducirse algunas conclusiones interesantes:

En primer lugar, puede asegurarse que el pandeo lateral de piezas en cajón, de dimensiones usuales, se presenta siempre en el rango plástico, pues aunque las vigas de los ejemplos son de longitudes mayores que las normales, todas fallan para esfuerzos muy cercanos al de fluencia.

En segundo término, vemos que el esfuerzo de trabajo resulta ser, en todos los casos, muy cercano al básico, $0.6\sigma_y$, es decir, la capacidad de carga de los elementos estudiados casi no disminuye por efecto del pandeo lateral, a pesar de que las relaciones l/b son mucho mayores que 30; de hecho, los elementos formados por dos perfiles estructurales, ángulos o canales, soldados entre sí para constituir el cajón, pueden diseñarse con el esfuerzo básico de $0.6\sigma_y$, tanto a tensión como a compresión, sin más revisión. Lo mismo puede decirse de cajones formados por cuatro placas, excepto en los casos en que sean excesivamente esbeltas y largas; solamente entonces será necesario revisar los esfuerzos permisibles.

Además, es evidente que en el diseño de traveses en cajón no será necesario tener en cuenta las restricciones impuestas por los apoyos ni la influencia de la ley de distribución de los momentos flexionantes sobre el fenómeno del pandeo lateral, puesto que éste carece, en general, de importancia.

PANDEO LATERAL DE VIGAS Y TRABES ARMADAS DE SECCION I

La rigidez y la resistencia a la torsión de una viga I es mucho menor que la de una sección en cajón hecha con la misma cantidad de material; de hecho, las secciones I son especialmente susceptibles al pandeo lateral, por sus propiedades geométricas. Sin embargo, constituyen uno de los elementos estructurales más utilizados para trabajos de flexión, por su economía, la facilidad con que pueden conectarse a otros elementos estructurales y su alta eficiencia para soportar cargas aplicadas en el plano de su alma, siempre que se evite el pandeo lateral.

Las traveses armadas, soldadas o remachadas, se emplean también ampliamente, aunque es conveniente sustituirlas por secciones en cajón cuando se tienen claros largos no soportados lateralmente, como en el caso de traveses carril para grúas.

En los casos de viguetas I de claros grandes, la ec. 6, obtenida para secciones transversales rectangulares, puede usarse como una base para la obtención de fórmulas de diseño. Sin embargo, al aumentar la relación peralte-claro el diseño se va haciendo cada vez más conservador, ya que se desprecia la resistencia adicional al pandeo proporcionada por la rigidez lateral de los patines.

En efecto, cuando una barra está sometida únicamente a la acción de pares de torsión, iguales y de sentido contrario, en sus extremos, estos

están en libertad para alabearse, y se presenta un caso de torsión pura; en las secciones transversales de la barra aparecen únicamente esfuerzos tangenciales, cuya distribución es constante a lo largo del eje del miembro; el ángulo de giro por unidad de longitud, también constante, es directamente proporcional a la intensidad del momento de torsión e inversamente proporcional a la rigidez torsional de la barra, y las fibras longitudinales de la pieza, inicialmente rectas, toman una forma helicoidal, pero sin cambio de longitud¹.

En cambio, si alguna de las secciones transversales no está en libertad de alabearse, o si la intensidad del momento de torsión varía a lo largo del eje de la pieza, se presenta un caso de torsión *no uniforme*, que da lugar a la aparición de esfuerzos de tensión y compresión en las fibras longitudinales de la barra.

Ilustremos el fenómeno considerando el caso de la torsión no uniforme de una viga I , empotrada en uno de sus extremos y sometida a la acción de un par M_t en el otro. (fig. 8)¹.

Es evidente que la resistencia de la viga a la torsión es mayor cuando uno de sus extremos está empotrado que cuando ambos pueden alabearse libremente, ya que en aquel caso la torsión es acompañada por flexión de los patines.

Por consiguiente, el momento de torsión M_t es equilibrado parcialmente por esfuerzos cortantes debidos a la torsión pura y parcialmente por la resistencia de los patines a la flexión.

Representemos las dos partes del momento resistente por M_{t1} y M_{t2} . M_{t1} depende de la ley de variación del ángulo de torsión a lo largo del eje de la viga:

$$M_{t1} = GJ \frac{d\phi}{dz} \quad (14)$$

La intensidad de la segunda parte del par resistente, M_{t2} , se encuentra considerando la flexión lateral de los patines. Todas las secciones giran alrededor del eje centroidal, z , el cual se mantiene fijo, por simetría, de manera que el desplazamiento lateral de uno cualquiera de los patines es

$$x = \phi \frac{h}{2}$$

El momento flexionante M_p en ese patin vale

$$M_p = EI_p \frac{d^2x}{dz^2} = \frac{EI_p h}{2} \frac{d^2\phi}{dz^2}$$

siendo I_p el momento de inercia del patin alrededor del eje y . Por consiguiente, la fuerza cortante en el patin considerado, es igual a

$$T_p = \frac{dM_p}{dz} = \frac{EI_p h}{2} \frac{d^3\phi}{dz^3}$$

En el otro patin aparece una fuerza de igual magnitud y sentido contrario: el par formado por

esas dos fuerzas constituye la segunda parte del momento interior que equilibra al de torsión; su valor es, por consiguiente

$$M_{t2} = T_p h = \frac{EI_p h^2}{2} \frac{d^3\phi}{dz^3} \quad (15)$$

Por tanto, la ecuación para torsión no uniforme de una viga I es

$$M_t = M_{t1} + M_{t2} = GJ \frac{d\phi}{dz} + \frac{EI_p h^2}{2} \frac{d^3\phi}{dz^3} \quad (16)$$

En general, para una pieza de sección transversal cualquiera, puede escribirse

$$M_t = GJ \frac{d\phi}{dz} + EC_w \frac{d^3\phi}{dz^3} \quad (17)$$

A C_w se le llama *constante de alabeo*, y a EC_w , *rigidez al alabeo*.

Esta ecuación es válida para cualquier barra de sección transversal abierta y de paredes delgadas.

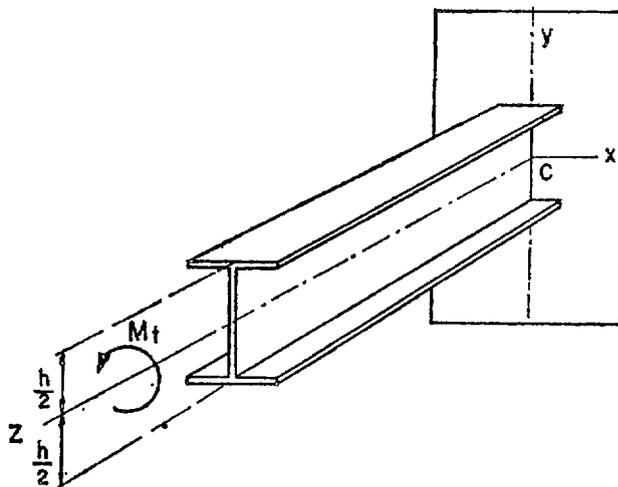


FIGURA 8

Al estudiar el pandeo lateral de vigas I , sometidas a flexión pura, las dos primeras ecuaciones de equilibrio son las mismas que para el caso de vigas de sección transversal rectangular (ecs. 1 y 2), pero la ec. 3 debe sustituirse por la (17), en la que se tiene en cuenta la resistencia adicional a la torsión proporcionada por la oposición a flexionarse que presentan los patines.

La integración de las ecuaciones diferenciales lleva a la expresión siguiente¹

$$M_{cr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EI_y GJ \left(1 + \frac{EC_w \pi^2}{GJ l^2}\right)} \quad (18)$$

La ecuación anterior nos da el momento crítico de pandeo para vigas I sometidas a flexión pura.

Efectuando las operaciones indicadas dentro del radical, la ec. 18 puede escribirse

$$M_{cr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EI_y GJ + E^2 C_w \frac{\pi^2}{l^2} I_y} \quad (19)$$

El primer término dentro del radical representa la contribución de la torsión pura a la resistencia del perfil al pandeo y el segundo la contribución de la oposición de los patines a flexionarse lateralmente. Obsérvese que si se desprecia este segundo término la ecuación se convierte en la (4), obtenida para vigas de sección transversal rectangular.

El esfuerzo crítico de pandeo se encuentra dividiendo M_{cr} entre el módulo de sección de la pieza, con lo que se obtiene

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi}{S_x l} \sqrt{EI_y GJ + E^2 C_w \frac{\pi^2}{l^2} I_y} \quad (20)$$

Si se corrige la fórmula 20 teniendo en cuenta el efecto desfavorable de la carga aplicada en el patin superior o la acción estabilizadora de las cargas colgadas del inferior, las condiciones de apoyo y la ley de variación del momento flexionante, se llega al resultado siguiente²:

$$\sigma_{cr} = \frac{C_4 \sqrt{EI_y GJ}}{S_x l} \quad (21)$$

La constante C_4 está dada por

$$C_4 = \frac{C_1}{K} \pi \left[\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{(Kl)^2} \frac{C_w E}{GJ} (C_2^2 + 1)} \pm \frac{C_2 \pi}{Kl} \sqrt{\frac{C_w E}{GJ}} \right] \quad (22)$$

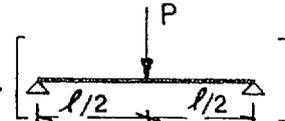
El signo negativo se toma cuando la carga está aplicada en el patin superior y el positivo cuando actúa en el inferior; si la viga está sometida a momentos en sus extremos o a cargas aplicadas en su eje centroidal, se toma $C_2 = 0$.



FIGURA 9

Los valores de los coeficientes C_1 , C_2 y K dependen primordialmente de los factores siguientes: el primero, de la ley de variación del momento flexionante, de las condiciones de apoyo en los extremos y de las restricciones existentes respecto a movimientos verticales y rotaciones alrededor de los ejes x ; C_2 , del efecto, desfavorable o favorable, de la posición de la carga, según que actúe en el patin superior o inferior, y K de las restricciones existentes en las secciones extremas contra la rotación alrededor del eje y .

TABLA - II. - Coeficientes C_4 en la ec. 21.



$\frac{GJ}{EC_w} l^2 = \left(\frac{l}{a}\right)^2$	La carga actúa en:		
	El centroide	El patin superior	El patin inferior
0.4	21.6	12.8	36.4
4	8.0	5.0	12.5
8	6.4	4.3	9.6
16	5.5	3.8	7.6
24	5.1	3.7	6.8
32	4.9	3.7	6.6
48	4.7	3.7	5.9
64	4.6	3.7	5.6
80	4.5	3.7	5.4
96	4.5	3.8	5.3
160	4.4	3.8	5.0
240	4.3	3.9	4.8
320	4.3	3.9	4.7
400	4.3	4.0	4.7

Cuando la viga está sometida exclusivamente a la acción de momentos en sus extremos, sin que obre ninguna carga entre ellos, $C_2 = 0$ y C_1 puede calcularse, conservadoramente; con la fórmula²

$$C_1 = 1.75 - 1.05k + 0.3k^2 \quad (23)$$

$$(-1 < k < +1)$$

siendo C_1 no mayor que 2.3 (es decir, $C_1 = 2.3$ para $k < -0.46$).

La fig. 11 proporciona los valores de C_4 para una variedad de condiciones de carga, basados en los datos de la fig. 10².

Los resultados de las figs. 10 y 11 corresponden, en todos los casos, a cargas aplicadas en el patín superior de la viga, que es la condición más común en la práctica.

En las tablas II y III están dados los valores de C_4 para vigas libremente apoyadas con una carga concentrada en el centro y con carga uniformemente repartida, respectivamente, aplicadas en el patín superior, en el inferior y en el centroide de la viga⁶.

Para secciones I , $C_w = I_y h^2 / 4$, siendo h la distancia entre los centroides de los patines.

En la ref. 1 están tabulados los valores de C_4 para otros casos.

Si el esfuerzo crítico dado por la ec. 20 ó 21 es mayor que el límite de proporcionalidad (supuesto igual a $\sigma_y / 2^{2.3}$) debe determinarse el esfuerzo de pandeo inelástico efectivo por medio

de la ec. 8, en la cual σ_c se sustituye por el esfuerzo crítico calculado con (20) ó (21).

Al aplicar las fórmulas anteriores a traves armadas soldadas, remachadas o atornilladas, la constante J debe calcularse como la suma de $1/3bt^3$ para todos los elementos rectangulares que formen la sección. Cuando los patines estén constituidos por varias placas, el espesor t se tomará igual al grueso total (suma de los gruesos de todas las placas) entre líneas de remaches o soldaduras, pero fuera de éstas deberán utilizarse los gruesos individuales^{7,8,2}. Sin embargo, si la separación entre remaches o pernos es mayor que la requerida para proporcionar una acción de conjunto efectiva, las distintas placas tenderán a deformarse individualmente entre remaches, de manera que la constante J calculada como se acaba de indicar deberá multiplicarse por un factor de reducción para obtener su valor efectivo.

La ec. 24 da un valor aproximado de la separación crítica p'

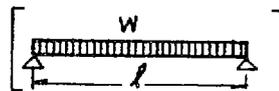
$$p' = t + T \quad (24)$$

siendo t el grueso de la placa individual y T el del conjunto de placas.

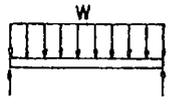
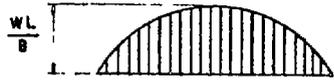
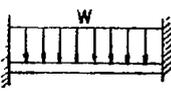
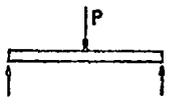
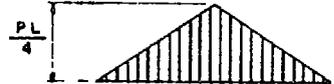
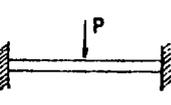
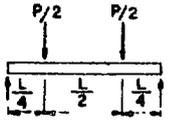
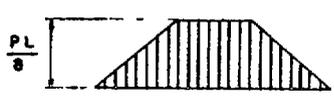
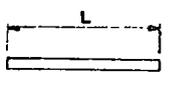
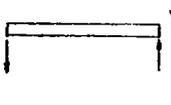
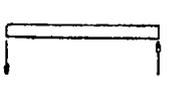
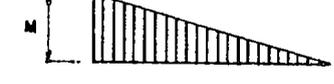
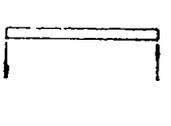
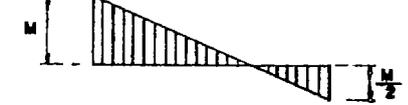
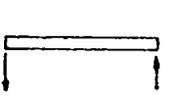
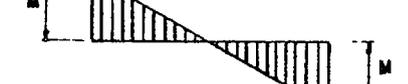
El factor de reducción, aplicable en los casos en que la separación real p sea mayor que p' , está dado por la expresión

$$\frac{1 - C}{1 - \frac{Cp'}{p}} \quad (25)$$

TABLA - III.- Coeficientes C_4 en la ec. 21



$\frac{GJ}{EC_w} l^2 = \left(\frac{l}{a}\right)^2$	La carga actúa en:		
	El centroide	El patín superior	El patín inferior
0.4	17.9	11.6	27.7
4	6.6	4.5	9.7
8	5.3	3.8	7.4
16	4.5	3.4	6.0
24	4.2	3.3	5.4
32	4.1	3.3	5.1
48	3.9	3.2	4.7
64	3.8	3.2	4.5
80	3.8	3.2	4.4
128	3.6	3.2	4.2
200	3.6	3.3	4.0
280	3.6	3.3	3.9
360	3.6	3.3	3.9
400	3.6	3.3	3.8

VALORES DE LOS COEFICIENTES EN LAS ECUACIONES 21, 22 y 47								
Caso N ^o	Carga y condiciones de apoyo respecto a los ejes horizontales (*)	Diagrama de momentos flexionantes	Condiciones de apoyo respecto a los ejes verticales	Valores de los coeficientes				
				K	C ₁	C ₂	C ₃	Curva correspondiente en la fig (1)
1			Apoyo libre	1.0	1.13	0.45		1A
			Apoyo fijo	0.5	1.97	0.29		1B
2			Apoyo libre	1.0	1.30	1.55		2A
			Apoyo fijo	0.5	0.86	0.82		2B
3			Apoyo libre	1.0	1.35	0.55		3A
			Apoyo fijo	0.5	1.07	0.42		3B
4			Apoyo libre	1.0	1.70	1.42		4A
			Apoyo fijo	0.5	1.04	0.84		4B
5			Apoyo libre	1.0	1.04	0.42		5A
6			Apoyo libre	1.0	1.0		1.0	
			Apoyo fijo	0.5	1.0		1.0	
7			Apoyo libre	1.0	1.31-1.32			
			Apoyo fijo	0.5	1.30-1.32			
8			Apoyo libre	1.0	1.77-1.86		6.5	
			Apoyo fijo	0.5	1.78-1.85			
9			Apoyo libre	1.0	2.33-2.62			
			Apoyo fijo	0.5	2.29-2.55			
10			Apoyo libre	1.0	2.56-2.74			
			Apoyo fijo	0.5	2.23-2.58			

* El desplazamiento lateral y el alabeo están impedidos en los extremos de todas las vigas

FIGURA 10

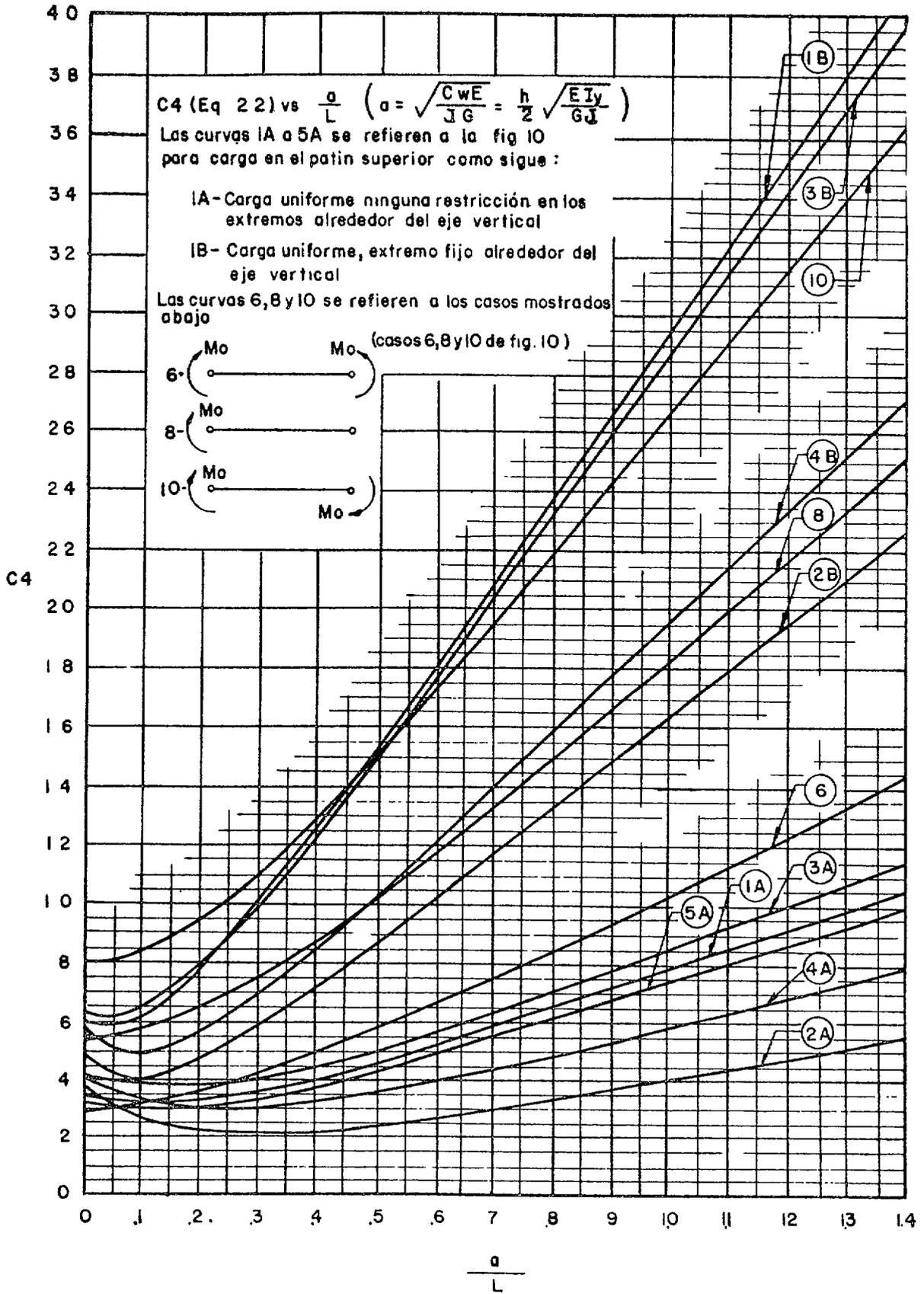


FIGURA 11

en la que

$$C = \left(\frac{p-p'}{0.8b} \right) \left(1 - \frac{1.2}{N^2} \right) \quad (26)$$

siendo b el ancho del patín y N el número de placas que lo compongan, incluyendo los ángulos de liga con el alma, cuando existan.

Las ecs. 25 y 26 son simplificaciones de fórmulas de la ref. 8, aplicables a traveses de propor-

ciones ordinarias. No deben considerarse como muy exactas, sino más bien como correcciones empíricas para tener en cuenta una condición muy compleja. Afortunadamente, no se requiere una gran precisión, ya que el pandeo lateral de traveses armados aperlaltadas depende fundamentalmente del producto EI_y y no de GJ , como veremos después.

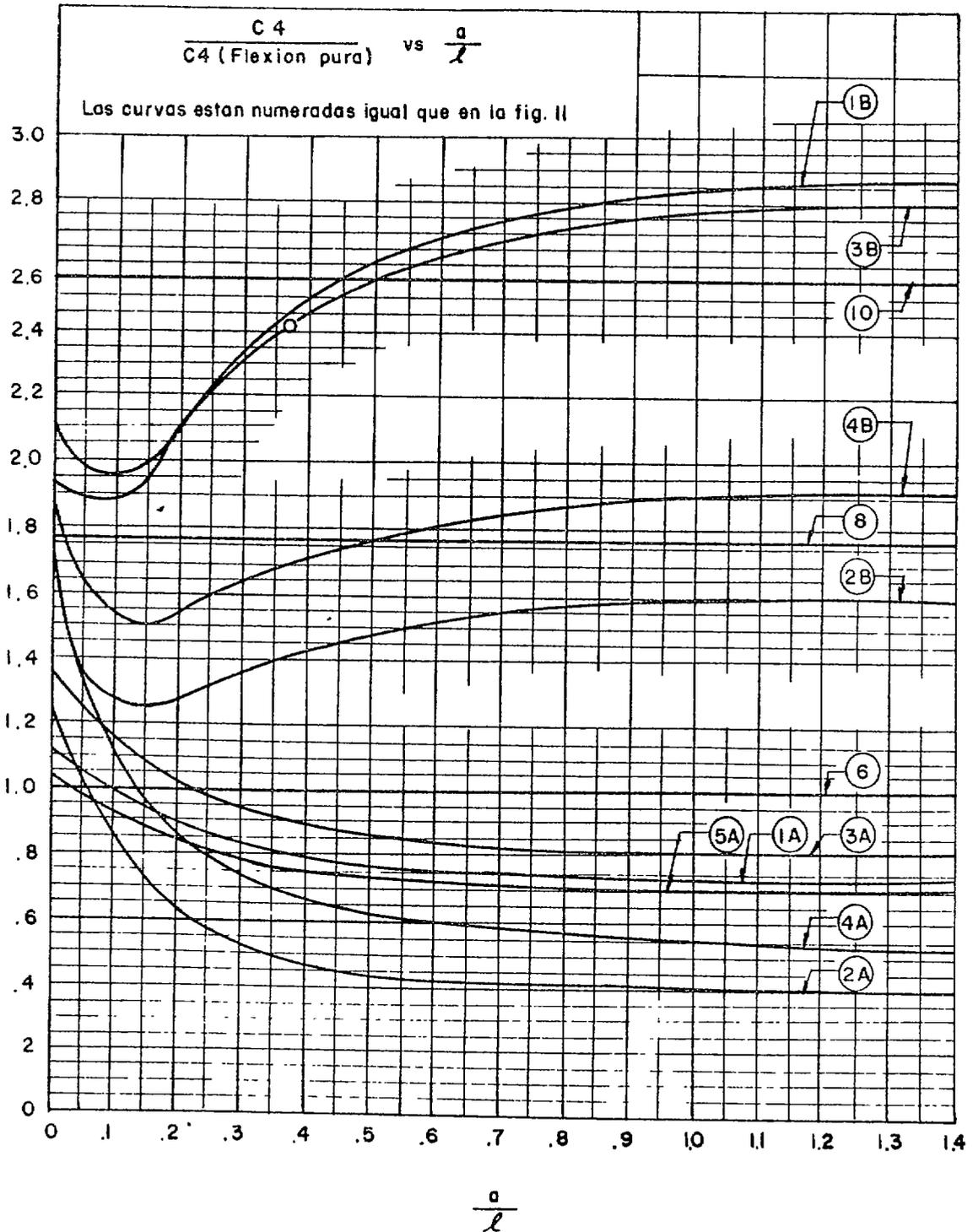


FIGURA 12

La ec. 21 proporciona una base muy precisa para el diseño de vigas y traves armadas de sección *I*; su aplicación resulta bastante sencilla cuando la constante *C*₁ está tabulada o dada gráficamente, como en la fig. 11, para diversas condiciones prácticas de carga y apoyo.

Sin embargo, su empleo resulta demasiado laborioso para trabajo de rutina, por lo que se han procurado obtener, partiendo de ella, ecuaciones simplificadas.

FORMULAS APROXIMADAS PARA LA DETERMINACION DE LA CARGA CRITICA DE PANDEO

Para obtener estas fórmulas no partimos de la ec. 21 sino de la (20), en la que no se tienen en cuenta los efectos favorables de las restricciones impuestas por los apoyos y se supone que la viga está sometida a flexión pura, que es la condición de carga más desfavorable; tampoco se tiene en cuenta la posición relativa de las cargas respecto a los centros de gravedad de las secciones transversales.

1 — SECCIONES LAMINADAS I Y H

Las secciones laminadas *I* y *H* que se utilizan como vigas sin soporte lateral tienen, en general, peraltes de cuando menos dos veces el ancho del patin y almas cuyo grueso es, como mínimo, 2/3 del grueso de éste; utilizando estas proporciones como típicas, se obtienen las siguientes

fórmulas aproximadas para el cálculo de sus propiedades geométricas²:

$$\begin{aligned} S_x &= 1.1btd \\ I_y &= b^3t/6 \\ J &= 0.9bt^3 \\ h &= 0.95d \\ C_w &= I_y h^2/4 \pm b^3td^2/26.6 \end{aligned}$$

en las que *b* es el ancho del patin, *d* el peralte de la viga, *t* el grueso de los patines y *h* la distancia entre los centros de gravedad de los mismos.

Llevando estos valores a la ec. 20 se obtiene la fórmula simplificada

$$\sigma_{cr} = \frac{0.69E}{\frac{ld}{bt}} \sqrt{1 + 1.07 \frac{(d/t)^2}{(l/b)^2}} \quad (27)$$

Si se desea emplear la ec. 27 para una viga con condiciones de apoyo o carga distintas de las que se consideraron al obtenerla, su efecto puede valuar por medio de un factor, que puede expresarse como una función de *a/l*, siendo

$$a = \sqrt{\frac{C_w E}{JG}}$$

de acuerdo con los valores aproximados supuestos para las propiedades de la sección, esa expresión se reduce a $\pm 0.33 \frac{bd}{t}$

TABLA — IV

Peralte(d) (cm.)	Peso (kg/m)	b (cm)	t (cm)	b t d (cm ³)	b t ³ (cm ⁴)	b ³ t (cm ⁴)	S _x (cm ³)	I _y (cm ⁴)	J (cm ⁴)	$\frac{S_x}{btd}$	$\frac{I_y}{b^3t}$	$\frac{J}{bt^3}$
7.6	8.48	5.9	0.66	29.6	1.69	135.6	27.1	19.1	1.87	0.92	0.141	1.10
10.2	11.46	6.8	0.74	51.2	2.75	232.7	48.9	32.1	3.08	0.95	0.138	1.12
12.7	14.88	7.6	0.83	80.0	4.34	364.4	79.3	51.2	4.83	0.99	0.141	1.11
15.2	18.60	8.5	0.91	117.5	6.40	558.8	119.0	77.0	7.12	1.01	0.138	1.11
17.8	22.77	9.3	0.99	164.0	9.02	837.7	169.6	111.1	10.24	1.03	0.133	1.14
20.3	27.38	10.2	1.08	224.0	12.85	1146.1	233.0	157.3	14.32	1.04	0.137	1.11
22.9	32.44	11.0	1.16	292.0	17.15	1544.0	309.3	214.8	—	1.05	0.139	—
25.4	37.80	11.8	1.25	375.0	23.10	2053.7	400.2	286.8	25.68	1.07	0.139	1.11
30.5	47.32	12.7	1.38	535.0	33.40	2826.8	589.4	395.4	38.33	1.10	0.139	1.15
30.5	60.72	13.3	1.67	678.0	62.00	3928.8	734.5	574.8	74.08	1.08	0.146	1.19
38.1	83.84	14.0	1.58	843.0	55.30	4335.5	965.2	608.5	65.34	1.14	0.140	1.18
38.1	90.48	15.2	2.07	1200.0	135.30	7269.4	1330.6	1080.5	—	1.11	0.149	—

Los factores correctivos han sido trazados en la fig. 12², tomando como base los datos de las figs. 10 y 11.

Debe tenerse en cuenta que la ec. 27 es aplicable únicamente a perfiles laminados *I* o *H*, puesto que se ha obtenido tomando como base las proporciones geométricas de esos perfiles.

Considerando que en México no contamos con perfiles *H* laminados, sino únicamente con perfiles *I*, podemos obtener una ecuación semejante a la (27), válida únicamente para nuestros perfiles *I*, que tendrá la ventaja de apegarseles con más exactitud.

Deduciremos esa ecuación basándonos en los datos de la tabla IV, en la que aparecen todos los perfiles *I* laminados con que contamos; esa tabla se ha formado tomando como base las ref. 9 y 10, esta última para los valores de la constante *J*.

Observando la tabla, y sin tomar en cuenta los dos primeros renglones, ya que las viguetas de 7.6 y 10.2 cm de peralte no se emplean nunca como elementos principales, podemos escribir las expresiones aproximadas

$$\begin{aligned} S_x &= 1.1 btd \\ I_y &= 0.135 b^3t \\ J &= 1.11 bt^3 \\ h &= 0.95d \\ C_w &= b^3td^2/32.5 \end{aligned}$$

Estos valores nos dan resultados del lado de la seguridad.

Sustituyéndolos en la ec. 20, obtenemos

$$\sigma_{cr} = \frac{0.69E}{\frac{ld}{bt}} \sqrt{1 + 0.71 \frac{(d/t)^2}{(l/b)^2}} \quad (28)$$

Puede verse que esta ecuación difiere de la (27) únicamente en el segundo término del radical, que es menor en la (28); esto se debe a que la ec. 27 se obtuvo para un promedio de las propiedades de viguetas *I* y *H*, mientras que la (28) corresponde a viguetas *I* únicamente que tienen patines más angostos que las *H* y, por consiguiente, menor resistencia al pandeo debida a la rigidez de los patines a la flexión lateral.

Si introducimos en el radical de la ec. 27 el término que está fuera de él, y efectuamos operaciones, obtenemos la expresión siguiente para el cálculo del esfuerzo crítico de pandeo lateral de perfiles laminados, *I* o *H*:

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\left[\frac{0.69E}{\frac{ld}{bt}} \right]^2 + \left[\frac{0.71E}{\left(\frac{l}{b}\right)^2} \right]^2} \quad (29)$$

El primer término dentro del radical representa la resistencia al pandeo debida a la rigidez torsional del perfil mientras que el segundo expresa la resistencia proporcionada por la rigidez a la flexión de los patines.

2 — TRABES ARMADAS

Partimos, de nuevo, de la ecuación general 20, y sustituimos las cantidades que aparecen en ella por los valores aproximados siguientes, obtenidos para la trabe armada de la fig. 13:

$$I_y = 2 \frac{tb^3}{12} = \frac{1}{6} A_p b^2$$

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{3} (t^3b + c^3h + t^3b) = \frac{1}{3} (2A_p t^2 + A_a c^2 + \\ &+ A_p t^2) = \frac{1}{3} A_p \left(2t^2 + \frac{A_a}{A_p} c^2 \right) \end{aligned}$$

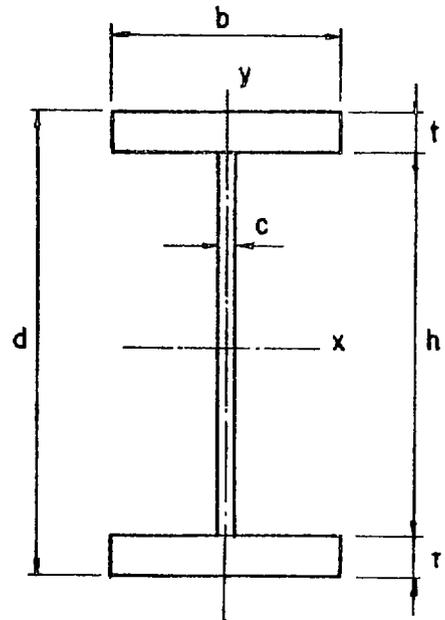


FIGURA 13

En las expresiones anteriores, A_a y A_p representan, respectivamente, las áreas del alma y de uno de los patines.

$$C_w = \frac{I_y h^2}{4} = \frac{1}{24} A_p b^2 h^2$$

Con todo rigor, en la expresión de C_w no debe aparecer h^2 sino la distancia entre los centroides de los patines ($h + t$) al cuadrado; sin embargo, el error cometido es despreciable en el caso de trabes armadas aperaltadas.

$$G = E/2(1 + \mu)$$

$$I_x = 2A_p \left(\frac{h}{2} \right)^2 + \frac{ch^3}{12} = \frac{h^2 A_p}{2} + \frac{A_a h^3}{12}$$

$$S_x = \frac{2I_x}{h} = hA_p + \frac{A_a h}{6} = hA_p \left(1 + \frac{1}{6} \frac{A_a}{A_p} \right)$$

En el cálculo de I_x cometemos un error semejante al de C_w .

Llevando los valores anteriores a la ec. 20 y haciendo simplificaciones algebraicas, llegamos al resultado siguiente¹³

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\underbrace{\frac{18(1+\mu)}{l^2 h^2} \cdot \frac{\pi^2 E^2}{b^2 t^2}}_A \cdot \underbrace{\frac{1 + \frac{c^2}{2t^2} \frac{A_a}{A_p}}{\left(1 + \frac{1}{6} \frac{A_a}{A_p}\right)^2}}_B + \underbrace{\frac{\pi^4 E^2}{l^4}}_C \cdot \underbrace{\frac{b^4}{\left(12 + 2 \frac{A_a}{A_p}\right)^2}}_D} \quad (30)$$

El término B de la ecuación anterior puede tomarse igual a 1, valor que adquiere casi exactamente cuando el grueso del patín t es alrededor de 1.2 veces el del alma, y siempre que el área del alma sea pequeña comparada con la del patín, es decir, llevando a él la condición $A_a/A_p \cong 0^{13}$; si, además, tomamos $\mu = 0.3$ y sustituimos h por d , lo que introduce errores muy pequeños en el caso de traves aperladas, el producto de los términos A y B se reduce a

$$\frac{(0.65E)^2}{l^2 d^2} = \left(\frac{0.65E}{ld}\right)^2$$

Veamos ahora cuánto vale el radio de giro, respecto al eje y , de un segmento de la sección transversal de la viga compuesto por el patín comprimido y la sexta parte del alma inmediata a él:

$$\begin{aligned} r_y^2 &= \frac{I_y}{A} = \frac{tb^3}{12} \left/ \left(A_p + \frac{1}{6} A_a\right) \right. = \\ &= \frac{A_p b^2}{12} \left/ \left(A_p + \frac{1}{6} A_a\right) \right. = \\ &= \frac{b^2}{12 \left(1 + \frac{1}{6} \frac{A_a}{A_p}\right)} = \frac{b^2}{12 + 2 \frac{A_a}{A_p}} \end{aligned}$$

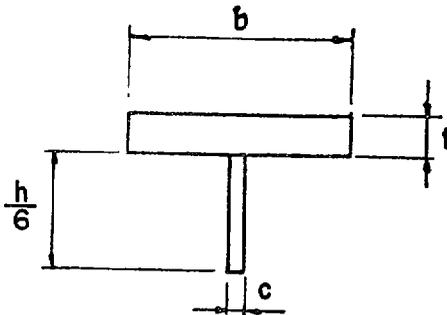


FIGURA 14

Es decir, el término D es, precisamente, r_y^4 . Teniendo en cuenta los resultados anteriores, la ec. 30 se reduce a

$$\begin{aligned} \sigma_{cr} &= \sqrt{\left[\frac{0.65E}{ld}\right]^2 + \frac{\pi^4 E^2}{l^4} r_y^4} = \\ &= \sqrt{\left[\frac{0.65E}{ld}\right]^2 + \left[\frac{\pi^2 E}{(l/r_y)}\right]^2} \quad (31) \end{aligned}$$

r_y es el radio de giro del patín de compresión más un sexto del alma.

3—SECCIONES DE LÁMINA DOBLADA

Las ecuaciones aproximadas 27 a 31 no son aplicables a perfiles de paredes muy delgadas, hechos con lámina doblada, puesto que se han obtenido introduciendo en las ecuaciones generales proporciones geométricas típicas de perfiles laminados, o de traves armadas formadas por placas relativamente gruesas, que no cumplen los perfiles de lámina.

Sin embargo, la ecuación general 20 si es aplicable para secciones de lámina con dos ejes de simetría, y a partir de ella podremos obtener fórmulas aproximadas aplicables a esas secciones.

Sustituimos, en la ec. 20, S_x por su valor en función de I_x , con lo que el término que está fuera del paréntesis se convierte en $\frac{\pi d}{2I_x}$; además, tomamos $C_{10} = I_y d^2/4$, pues siendo el espesor de los patines muy pequeño podemos despreciar la diferencia existente entre el peralte total de la sección y la distancia entre los centroides de los patines.

Introduciendo el término $\pi d/2I_x$ dentro del radical y efectuando operaciones, llegamos a la expresión siguiente, que corresponde a las ecs. 29 y 31:

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\left[\frac{0.98E}{l/d} \sqrt{\frac{I_y}{I_x^2}}\right]^2 + \left[\frac{2.46E}{(l/r_y)} \left(\frac{d}{r_x}\right)^2\right]^2} \quad (32)$$

Lo mismo que en (29) y (31), el primero de los dos términos del radical representa la contribución de la rigidez torsional a la resistencia al pandeo y el segundo la de la rigidez lateral de los patines.

Para las vigas de lámina de dimensiones económicas, la relación d/r_x es casi constante e igual a 2.5 o un poco mayor^{11,12}. Haciendo esta sustitución en la ec. 30, el segundo término se simplifica, y se obtiene

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\left[\frac{0.98E}{(l/d)} \sqrt{\frac{I_y}{I_x^2}}\right]^2 + \left[\frac{15.4E}{(l/r_y)}\right]^2} \quad (33)$$

Al aplicar esta ecuación hay que recordar que es válida para secciones]], ó □□, de proporciones semejantes a las tabuladas en la ref. 12, pero que puede no ser aplicable para secciones que tengan otras proporciones.

Si la aplicación de cualquiera de las ecs. 27 a 33 arroja valores de σ_{cr} mayores que $\sigma_v/2$, esos valores deberán corregirse en la forma indicada al discutir las fórmulas 20 y 21; en todos los casos, los esfuerzos de trabajo se obtendrán dividiendo σ_{cr} entre el coeficiente de seguridad.

ESPECIFICACIONES PARA DISEÑO

La ec. 21 nos permite calcular, con la mayor precisión posible, la carga crítica de pandeo de secciones I con dos ejes de simetría, ya sean laminadas, formadas por placas soldadas o remachadas o hechas con lámina doblada, teniendo en cuenta la posición de la carga respecto al eje de simetría horizontal, las condiciones de apoyo y la forma en que varía el momento flexionante a lo largo de la viga.

Sin embargo, se ha considerado que esa fórmula es demasiado complicada para uso rutinario y que su aplicación sólo se justifica en casos especiales.

La ec. 20, válida teóricamente tan sólo para piezas sometidas a flexión pura, es la base de las fórmulas utilizadas generalmente para diseño. De ella hemos obtenido, introduciendo simplificaciones válidas en cada uno de los casos particulares, las ecs. 29, 31 y 33 aplicables, respectivamente, a vigas laminadas, H o I , a traveses formadas por tres placas, soldadas o remachadas, y a perfiles de lámina delgada. Debe tenerse en cuenta que cada una de las tres ecuaciones anteriores es aplicable tan sólo al caso para el que ha sido deducida, ya que las hipótesis simplificatorias cambian notablemente de uno a otro tipo de perfil, así como que todas ellas están basadas en un comportamiento elástico de las piezas, por lo que los resultados que proporcionen deberán corregirse en los casos en que el pandeo se presente en el rango inelástico.

Las tres ecs., 29, 31 y 33, tienen la misma forma general, y en los tres casos el primer término dentro del radical representa la contribución de la torsión pura a la resistencia al pandeo lateral y el segundo la contribución debida a la oposición de los patines a la flexión lateral.

Aunque las fórmulas anteriores pueden aplicarse ya con bastante facilidad, al escribir especificaciones se ha tratado de obtener fórmulas aún más sencillas que den, desde luego, resultados del lado de la seguridad. Así, la costumbre ha sido suprimir, en cada caso, el más pequeño de los términos que aparecen dentro del radical ya que, en general, para cada tipo de perfiles uno de los términos es considerablemente mayor que el otro.

Las especificaciones del AISC anteriores a 1961 daban las indicaciones siguientes respecto al cálculo del esfuerzo permisible en los patines comprimidos de secciones I^{14} :

Esfuerzo permisible de compresión en las fibras extremas de secciones laminadas y traveses armadas:

Para ld/bt no mayor de 600
1400 kg/cm²

Para ld/bt mayor de 600

$$\frac{845000}{ld/bt} \text{ kg/cm}^2 \quad (34)$$

l es la longitud no soportada lateralmente y d el peralte del miembro; b el ancho y t el grueso de su patín de compresión, todos en la misma unidad de longitud.

La fórmula 34, aunque deducida originalmente de una manera empírica por de Vries¹, comparando resultados con los obtenidos con las fórmulas teóricas para el caso de vigas libremente apoyadas cargadas uniformemente en su patín superior, puede obtenerse de la ec. 29, despreciando el segundo término del radical y utilizando un coeficiente de seguridad de 1.66. En efecto

$$\sigma_p = \frac{\sigma_{cr}}{1.66} = \frac{0.69E}{1.66 ld/bt} = \frac{845000}{ld/bt}$$

El hecho de que se mantenga un esfuerzo permisible constante para valores de ld/bt menores que 600 indica que no se ha introducido ninguna corrección por pandeo inelástico para piezas cortas, lo que parece indicar que en esos casos se tienen resultados del lado de la inseguridad, es decir, que el coeficiente de seguridad real es menor que el supuesto, de 1.66. Sin embargo, esta aparente omisión ha demostrado ser satisfactoria en la práctica cuando la fórmula se aplica a vigas laminadas con extremos conectados por medio de remaches o soldaduras, ya que las conexiones proporcionan una restricción parcial alrededor de los dos ejes principales de la sección, reduciendo por consiguiente el claro no soportado efectivo y proporcionando un factor conservador adicional que, aunque indeterminado, tiende a equilibrar el error cometido al no corregir los resultados en el rango inelástico.

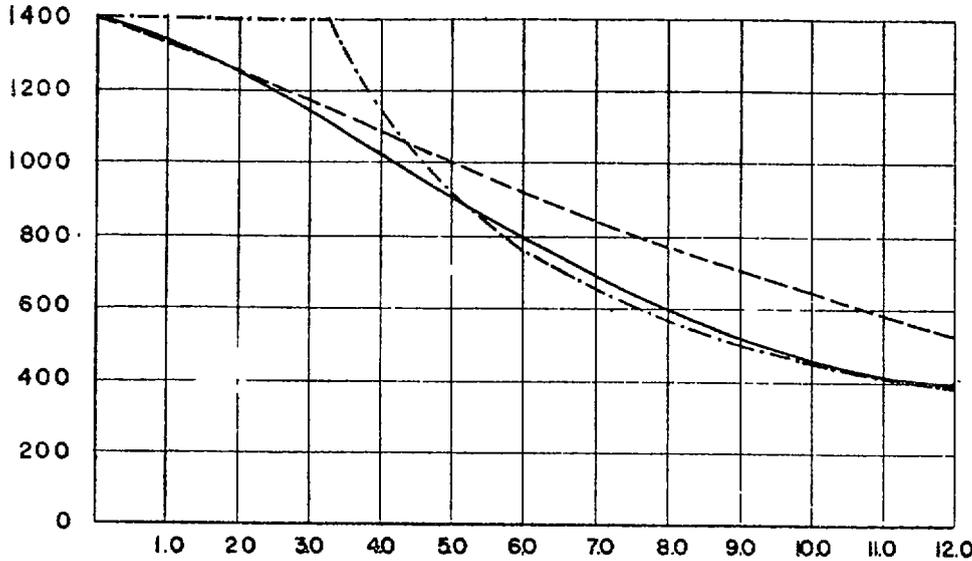
De Vries dedujo su fórmula únicamente para perfiles laminados, I o H , para los que da resultados bastante aceptables, como puede verse en las curvas de las figs. 15 y 16, obtenidas para dos perfiles I laminados escogidos al azar.

En esas figuras, las gráficas de la ec. 21 corresponden al caso de una viga libremente apoyada con una carga concentrada en el centro del claro.

La longitud no soportada lateralmente l aparece en el denominador de los dos términos de la ec. 29, en el primero a la primera potencia y en el segundo al cuadrado; por ese motivo, la exactitud de la ec. 34, en la que se desprecia el segundo término, aumenta con la longitud de la pieza.

Ahora bien, si se aplica la ec. 34 a traveses armadas esbeltas, da resultados exageradamente del lado de la seguridad, ya que la resistencia al pandeo lateral de este tipo de perfiles proviene fundamentalmente de la rigidez lateral de sus patines, la cual se desprecia en (34); por ese motivo, las especificaciones AISC de 1961 se han modificado como sigue⁴:

σ_p
(kg/cm²)



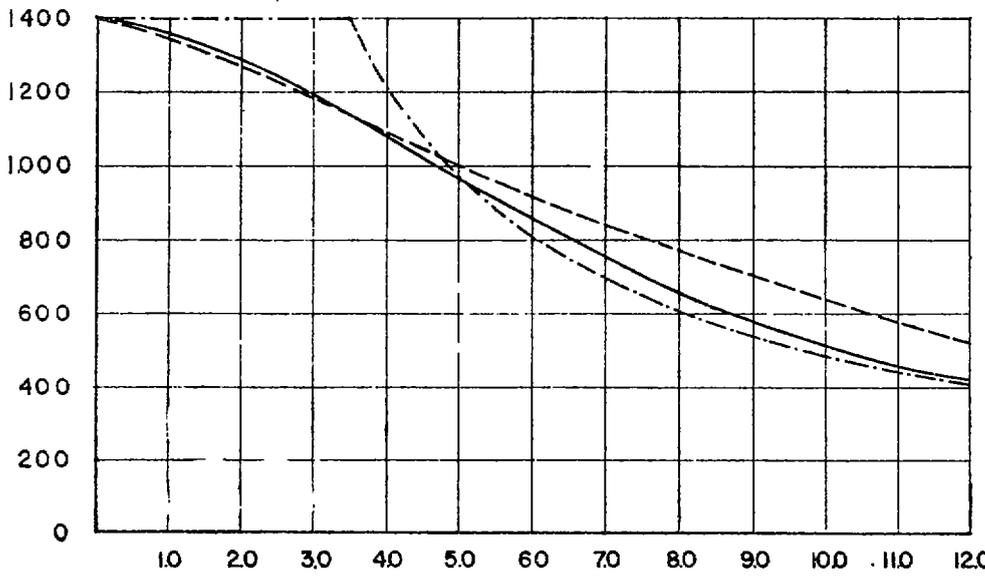
I 8" (203mm.)
Acero A7

Ec. 21.- -----
Ec. 29.- _____
Ec. 34.- - . - . - . -

Long.(m)

FIGURA 15

σ_p
(kg/cm²)



I 12" (305mm. Liv.)
Acero A7

Ec. 21.- -----
Ec. 29.- _____
Ec. 34.- - . - . - . -

Long.(m)

FIGURA 16

"El esfuerzo permisible de compresión en las fibras extremas de perfiles laminados y travesaños armados que tengan un eje de simetría en el plano de su alma, y cuya sección transversal no sea en cajón, será igual al mayor de los valores obtenidos con las fórmulas siguientes, pero no mayor de $0.6 \sigma_y$

$$\sigma_p = \frac{845\,000}{l d / A_p} \quad (34)$$

$$\sigma_p = \left[1.0 - \frac{(l/r)^2}{2C_c^2 C_b} \right] 0.6 \sigma_y \quad (35)$$

siendo l la longitud no contraventeada lateralmente del patín de compresión, r el radio de giro de una sección T formada por el patín de compresión y un sexto del alma, alrededor del eje de simetría en el plano del alma, A_p el área del patín de compresión, C_c una constante definida con anterioridad^{4,8} y C_b , que puede conservadoramente tomarse como la unidad, igual a

$$C_b = 1.75 - 1.05 \left(\frac{M_1}{M_2} \right) + 0.3 \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2,$$

pero no mayor que 2.3 (ec. 23) donde M_1 es el menor y M_2 el mayor de los momentos fle-

xionantes en los extremos de la longitud no contraventeada, tomados alrededor del eje de mayor momento de inercia (M_1/M_2 es positivo cuando la pieza se flexiona en curvatura simple y negativo cuando la curvatura de la pieza es doble). M_1/M_2 se tomará igual a la unidad en todos los casos en que el momento en cualquier punto dentro de la longitud no contraventeada sea mayor que el más grande de los momentos extremos."

La ec. 35 se obtiene de la (31), despreciando ahora el primer término e introduciendo de nuevo el factor de seguridad de 1.66; considerando tan sólo el segundo término de (31), se tiene, en efecto:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(l/r)^2} \quad (36)$$

ecuación que es válida para pandeo elástico.

Corrigiendo para los casos de pandeo inelástico, de acuerdo con la ec. 8, obtenemos

$$\sigma_{cr} = \sigma_y \left(1 - 0.25 \frac{\sigma_y}{\sigma_{cr}} \right) = \sigma_y \left[1 - \frac{1}{4} \frac{(l/r)^2}{\pi^2 E} \sigma_y \right]$$

Haciendo

$$\sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}} = C_c$$

se llega a

$$\sigma_{cr} = \sigma_y \left[1 - \frac{(l/r)^2}{2C_c^2} \right] \quad (37)$$

ecuación válida para pandeo en el rango plástico.

Introduciendo en (36) y (37) el coeficiente de seguridad de 1.66 y en la segunda, además, el factor C_b , obtenemos

$$\sigma_p = \frac{\pi^2 E}{1.66 \left(\frac{l}{r} \right)^2} = \frac{12\,100\,000}{(l/r)^2}, \text{ kg/cm}^2 \quad (38)$$

válida para $\frac{l}{r} \geq C_c$

$$\sigma_p = \frac{\sigma_y}{1.66} \left[1 - \frac{(l/r)^2}{2C_c^2 C_b} \right] = \left[1 - \frac{(l/r)^2}{2C_c^2 C_b} \right] 0.60 \sigma_y;$$

válida para $\frac{l}{r} \leq C_c$ (39)

La ec. 39 coincide exactamente con la fórmula 4 de la ref. 4.

En las especificaciones en vigor del AISC⁴ no aparece la fórmula 38, sino se aplica la (39) para todos los valores de l/r , lo que da lugar a diseños exageradamente conservadores para relaciones de esbeltez altas, como se ve en la fig. 17.

La introducción de dos fórmulas, 39 y 34, en las especificaciones del AISC, en lugar de la (34) únicamente, elimina en muchas ocasiones errores exagerados del lado de la seguridad; sin embargo, todavía pueden obtenerse errores máximos de alrededor de 30%, cuando los dos términos bajo el radical sean iguales; en efecto, en

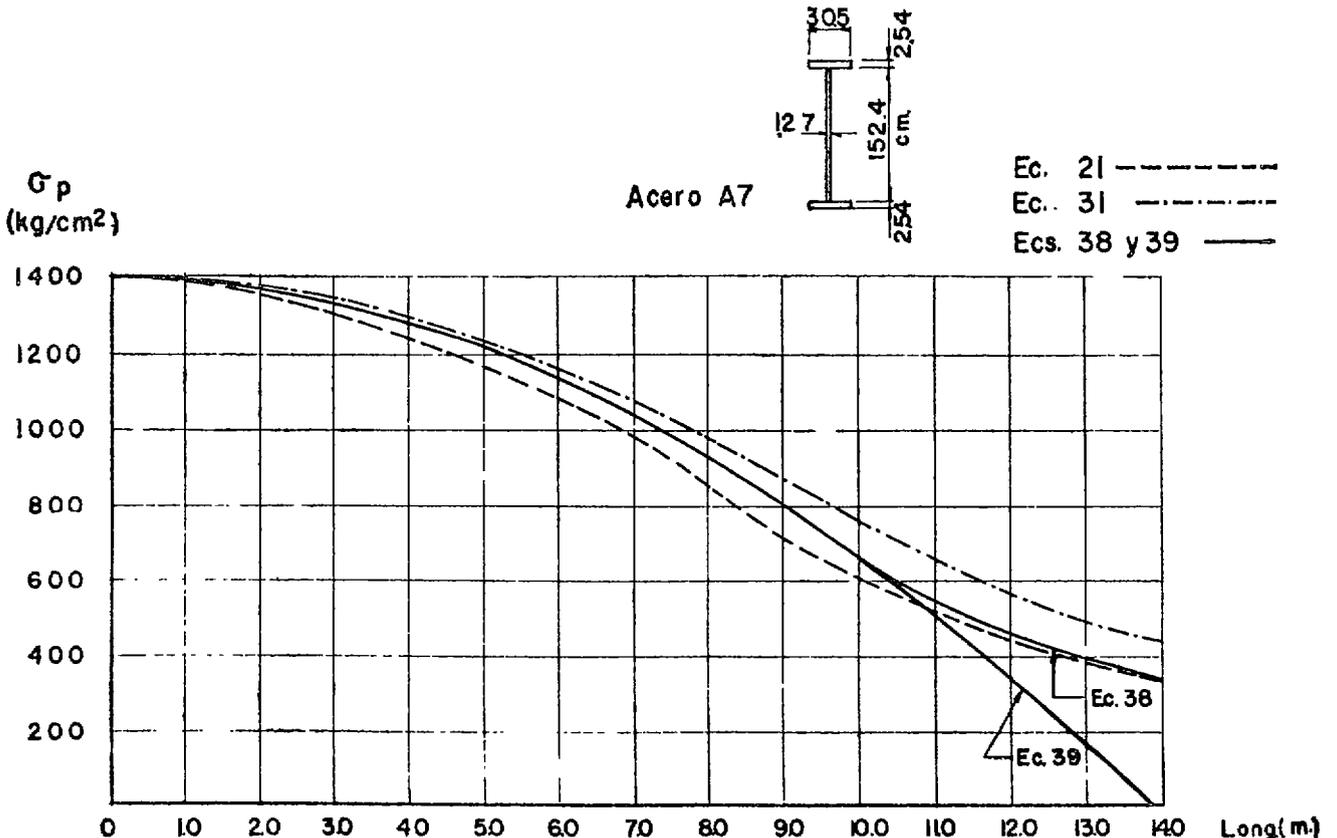


FIGURA 17

ese caso cualquiera de las dos fórmulas nos da un esfuerzo igual a $\sqrt{0.5}$, o sea 0.707 del esfuerzo obtenido aplicando la ec. 31.

Este caso extremo se presenta cuando

$$l \doteq 1.25 \frac{db}{t} \quad (40)$$

Para el significado de las literales, véase la fig. 13.

En el Proyecto de Reglamento de las Construcciones en el Distrito Federal⁵ se han adoptado los mismos criterios que en las especificaciones del AISC, pero es de recomendar el empleo de la ec. 38 para relaciones de esbeltez mayores que C_c y la utilización de la ec. 31 en todos los casos en que las proporciones de las trabes armadas estén cerca de las dadas por la relación (40).

En el caso de perfiles formados con lámina delgada puede demostrarse^{11,15} que el primer término del radical de la ec. 33 es, en general, despreciable en comparación con el segundo; esta suposición es la base de las fórmulas para la determinación de los esfuerzos de trabajo por el pandeo lateral, dadas por el Instituto Americano del Hierro y del Acero (AISI) en sus especificaciones de 1962 para el diseño de perfiles de lámina delgada de acero, doblados en frío¹².

En efecto, la ec. 33 se reduce a

$$\sigma_{cr} = \frac{15.4E}{(l/r_y)^2}$$

Tomando $E = 2094000 \text{ kg/cm}^2$, valor recomendado por el AISI, se obtiene

$$\sigma_{cr} = \frac{32\,250\,000}{(l/r_y)^2} \text{ kg/cm}^2 \quad (41)$$

Como en los casos anteriores, esta ecuación es válida nada más para pandeo elástico, y debe corregirse para piezas cortas en las que el fenómeno se produzca en el rango plástico. En este caso, y aceptando las mismas fórmulas aproximadas que para perfiles laminados, llegamos a

$$\begin{aligned} \sigma_{cr} &= \sigma_y \left(1 - 0.25 \frac{\sigma_y}{\sigma_e} \right) = \\ &= \sigma_y \left[1 - \frac{0.25 \sigma_y}{32\,250\,000} \left(\frac{l}{r_y} \right)^2 \right] = \\ &= \sigma_y - \frac{\sigma_y^2}{129 \times 10^6} \left(\frac{l}{r_y} \right)^2 \end{aligned} \quad (42)$$

Obtenemos los esfuerzos de diseño dividiendo los dados por las fórmulas anteriores entre el factor de seguridad básica, 1.65

$$\sigma_p = \frac{19\,500\,000}{(l/r_y)^2} \text{ kg/cm}^2 \quad (43)$$

Esta fórmula es aplicable para pandeo en el rango elástico, el que se presenta cuando

$$\frac{l}{r} \geq 8030 / \sqrt{\sigma_y} = 6220 / \sqrt{\sigma_b}$$

Para valores menores de l/r el pandeo es inelástico, y la fórmula para el esfuerzo permisible, obtenida de (42) es

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \frac{\sigma_y}{1.65} - \frac{\sigma_y^2}{1.65 \times 129 \times 10^6} \left(\frac{l}{r_y} \right)^2 = \\ &= \sigma_b - \frac{\sigma_y^2}{(1.65)^2 \times 78.5 \times 10^6} \left(\frac{l}{r_y} \right)^2 = \\ &= \sigma_b - \frac{\sigma_b^2}{785 \times 10^5} \left(\frac{l}{r_y} \right)^2 \end{aligned} \quad (44)$$

Al cociente de σ_y entre 1.65 lo designamos esfuerzo básico σ_b .

La fórmula recomendada por el AISI en sus especificaciones para pandeo en el rango inelástico difiere ligeramente de la ec. 44, ya que se obtuvo utilizando una curva de transición, del tipo $\sigma_p = A - B(l/r_y)^2$, que coincide con la ec. 43 en el punto correspondiente al límite de proporcionalidad efectivo del material; además, siguiendo el mismo criterio que el AISI, el AISI especifica esfuerzos de trabajo constantes, iguales al básico, para valores pequeños de la relación l/r_y .

En resumen, el AISI recomienda las ecuaciones siguientes¹², válidas para secciones I o en forma de canal (su validez para perfiles del segundo tipo se ha demostrado experimentalmente¹⁵):

Para l/r_y menor o igual a $2660/\sqrt{\sigma_b}$,

$$\sigma_p = \sigma_b$$

Para l/r_y mayor que $2660/\sqrt{\sigma_b}$ pero menor que $5960/\sqrt{\sigma_b}$ (pandeo inelástico):

$$\sigma_p = \frac{10}{9} \sigma_b - \frac{\sigma_b^2}{638 \times 10^5} (l/r_y)^2 \quad (45)$$

Para l/r_y igual o mayor que $5960/\sqrt{\sigma_b}$ (pandeo elástico),

$$\sigma_p = \frac{19\,700\,000}{(l/r_y)^2} \quad (46)$$

Las ecs. 45 y 46 corresponden, respectivamente, a nuestras ecuaciones 44 y 43, y el valor de l/r_y que separa las zonas de aplicación de una y otra, $5960/\sqrt{\sigma_b}$, es muy cercano al que obtuvimos antes, $6220/\sqrt{\sigma_b}$, basado en la suposición análoga a la hecha en perfiles laminados, de que $\sigma_{LP} = \sigma_y/2$.

Para relaciones l/r_y menores que $2660/\sqrt{\sigma_b}$, la ec. 45 da valores de σ_p mayores que σ_b , pero en esos casos se toma $\sigma_p = \text{cte} = \sigma_b$.

En la fig. 18 están representadas las curvas correspondientes a las ecs. 45 y 46 y el rango de aplicación de cada una de ellas.

En la fig. 19 se comparan los esfuerzos permisibles obtenidos aplicando las especificaciones

del AISI y la ec. 33 a un perfil *I* de lámina doblada, tomado de la ref. 12. Puede verse que, al contrario de lo que sucede con los perfiles laminados, los errores cometidos al aplicar las fórmulas de las especificaciones aumentan con la longitud de la pieza, ya que en el término de la ec. 33 que se desprecia, la longitud, que aparece en el denominador, está a la primera potencia, mientras que en el término que se conserva esa longitud, también en el denominador, está elevada al cuadrado; por consiguiente, la impor-

tancia relativa del término que no se toma en cuenta aumenta con la longitud libre de la pieza.

EJEMPLO 2

Se tiene una viga libremente apoyada, cuya sección transversal se muestra en la fig. 20, de 8 m de claro y sin ningún soporte lateral en esa longitud; sobre su patín superior obra una carga uniformemente repartida. Calcular el esfuerzo de trabajo a la flexión reducido por pandeo, considerando un coeficiente de seguridad de 1.65, y suponiendo que el acero de la viga es A7.

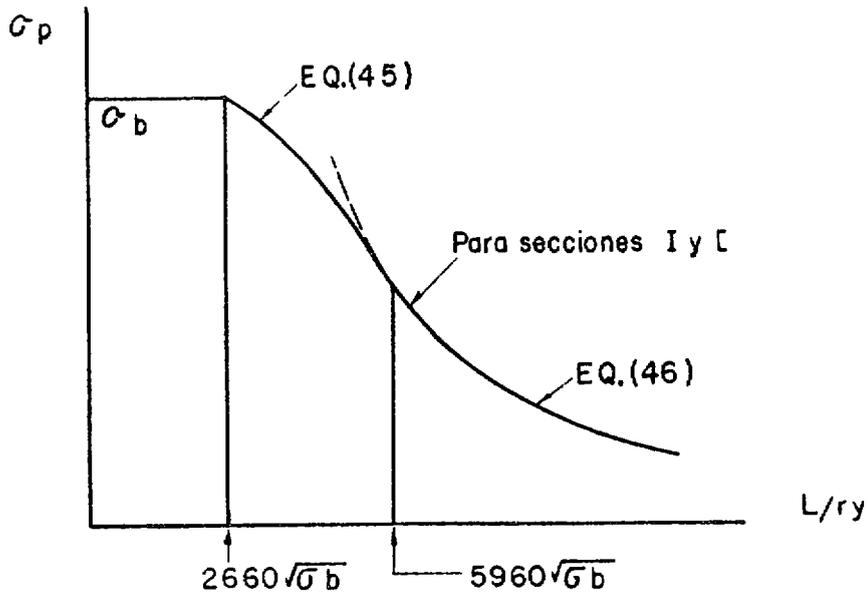
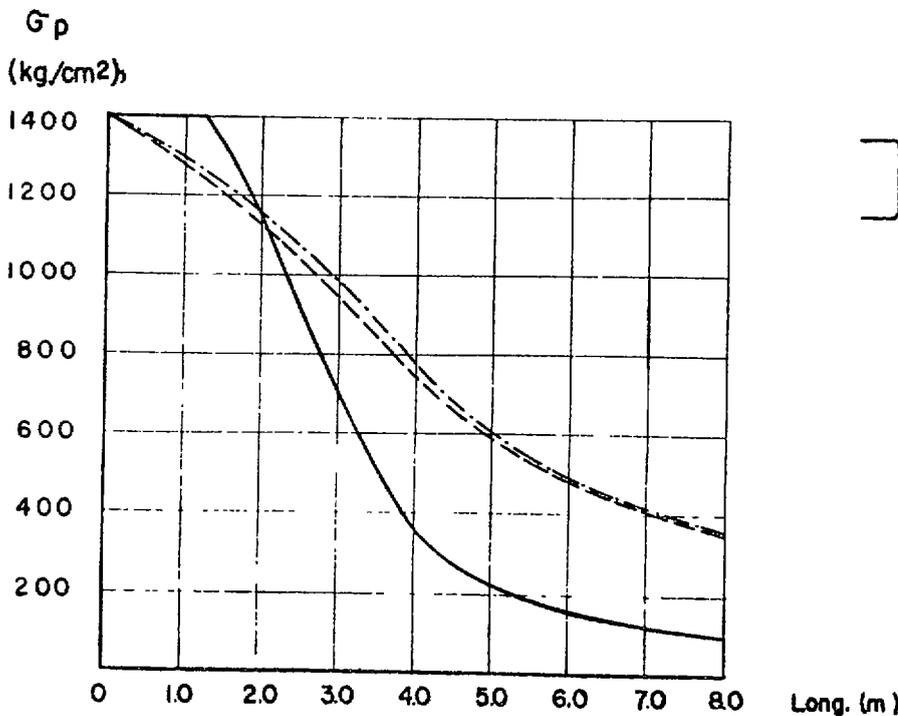


FIGURA 18



Sec 8x4, lámina N^o 10
(Ref 12, p 98)

Ec. 21 - - - - -

Ec. 33 - - - - -

Especificaciones del
A.I.S.I. ,1962 - - - - -

FIGURA 19

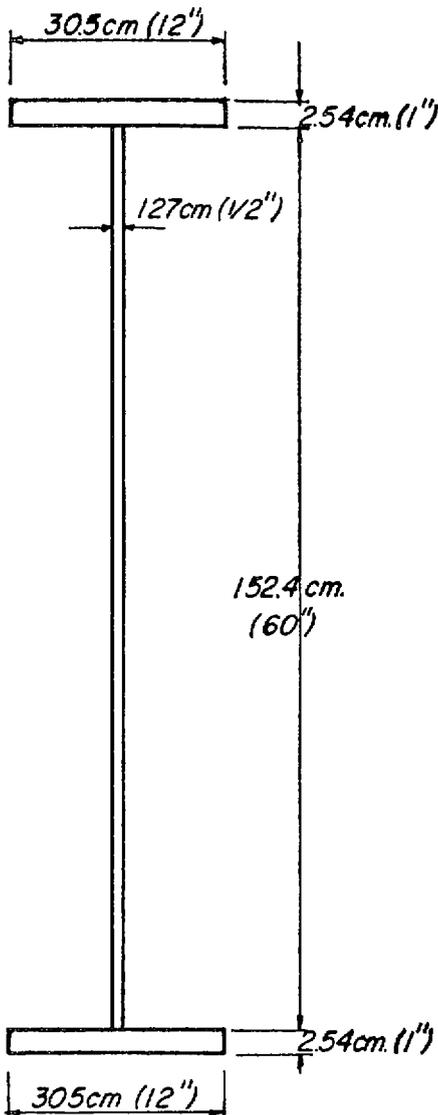


FIGURA 20

$$\begin{aligned}
 A &= 349 \text{ cm}^2 \\
 I_y &= 11987 \text{ cm}^4; \quad r_y = 5.9 \text{ cm} \\
 I_x &= 1\,304\,600 \text{ cm}^4; \quad S_x = 16\,600 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

a) Método "exacto" (ec. 21)

$$\sigma_{cr} = \frac{C_4 \sqrt{EI_y GJ}}{S_x l} \quad (21)$$

$$J = \frac{1}{3} \sum bt^3 = 438 \text{ cm}^4$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{EI_y GJ} &= \sqrt{EI_y \frac{E}{2(1+\mu)} J} = \sqrt{\frac{E^2}{2.6} I_y J} = \\
 &= 2039 \times 10^3 \sqrt{\frac{11987 \times 438}{2.6}} = 289 \times 10^7 \text{ kg/cm}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_4 &= \frac{C_1}{K} \pi \left[\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{(KI)^2} \frac{C_w E}{GJ}} (C_2^2 + 1) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{C_2}{KI} \sqrt{\frac{C_w E}{GJ}} \right] \quad (22)
 \end{aligned}$$

El segundo término dentro del paréntesis tiene signo negativo por estar la carga aplicada en el patín superior de la trabe.

$$C_w = \frac{11987 \times 154.9^2}{4} = 718 \times 10^5 \text{ cm}^4$$

$$\frac{C_w E}{GJ} = \frac{C_w E}{E} = \frac{2.6 C_w}{J} = 425\,000$$

De la fig 10: $K = 1.0$, $C_1 = 1.13$, $C_2 = 0.45$
Sustituyendo en la ec. 22, obtenemos

$$C_4 = \frac{1.13}{1.0} \times$$

$$\begin{aligned}
 &\times 3.14 \left[\sqrt{1 + \frac{3.14^2}{800^2} \times 425\,000 (0.45^2 + 1)} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{0.45 \times 3.14}{800} \sqrt{425\,000} \right] = 6.52
 \end{aligned}$$

El valor de C_4 puede obtenerse mucho más rápidamente utilizando las gráficas de la fig. 11; en efecto, con la curva 1A y para

$$a/l = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{C_w E}{JG}} = \frac{652}{800} = 0.815;$$

obtenemos $C_4 \approx 6.4$ valor muy cercano al calculado arriba.

En este caso no es utilizable la tabla III, porque para valores muy pequeños de $(l/a)^2$ no se puede interpolar linealmente; sin embargo, partiendo de los datos tabulados en II y III pueden trazarse gráficas que sí permitan calcular los valores de C_4 aún para valores pequeños de ese parámetro.

Por consiguiente, utilizando la ec. 21, se llega al resultado

$$\sigma_{cr} = \frac{6.5 \times 289 \times 10^7}{16\,600 \times 800} = 1410 \text{ kg/cm}^2$$

Como este esfuerzo es mayor que σ_{LP} ($\sigma_{LP} = 1160 \text{ kg/cm}^2$), el pandeo se presenta en el rango inelástico, y es necesario corregir el resultado obtenido por medio de la ec. 8:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{cr})_{real} &= 2320 \left(1 - 0.25 \times \frac{2320}{1410} \right) = \\
 &= 2320 (1 - 0.412) = 1360 \text{ kg/cm}^2
 \end{aligned}$$

Utilizando el coeficiente de seguridad especificado de 1.65, obtenemos el valor siguiente para el esfuerzo de trabajo admisible en el patín de compresión

$$\sigma_p = \frac{1360}{1.65} = 828 \text{ kg/cm}^2$$

b) Método basado en la ec. 31

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\left[\frac{0.65E}{ld/bt} \right]^2 + \left[\frac{\pi^2 E}{(l/r_y)^2} \right]^2} \quad (31)$$

$$r_y = \sqrt{\frac{5994}{109.7}} = 7.4 \text{ cm}$$

$$\frac{ld}{bt} = \frac{800 \times 157.5}{30.5 \times 2.54} = 1620$$

$$\left(\frac{l}{r_y} \right)^2 = \left(\frac{800}{7.4} \right)^2 = 11\,600$$

El radio de giro r_y que aparece en la ec. 31 es el del patín de compresión y una sexta parte del alma, como se muestra en la fig. 21.

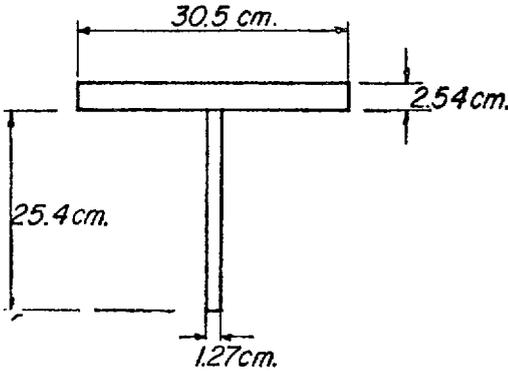


FIGURA 21

$$\frac{0.65E}{ld/bt} = \frac{0.65 \times 2039 \times 10^4}{1620} = 815 \text{ kg/cm}^2$$

$$\frac{\pi^2 E}{(l/r_y)^2} = \frac{3.14^2 \times 2039 \times 10^4}{11\,600} = 1720 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{cr} = \sqrt{(815)^2 + (1720)^2} = 1818 \text{ kg/cm}^2 > \sigma_{LP}$$

Corrigiendo el resultado, teniendo en cuenta que el pandeo se presenta en el rango inelástico, obtenemos

$$(\sigma_{cr})_{real} = 2320 \left(1 - 0.25 \times \frac{2320}{1818} \right) = 2320 (1 - 0.32) = 1580 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_y = \frac{1580}{1.65} = 960 \text{ kg/cm}^2$$

c) Especificaciones del AISC anteriores a 1961

$$\sigma_y = \frac{845\,000}{ld/bt} = \frac{845\,000}{1620} = 520 \text{ kg/cm}^2$$

d) Especificaciones del AISC de 1961 y del Proyecto de Reglamento del D. F.

El esfuerzo permisible será el mayor de los dos valores siguientes:

$$\sigma_{p1} = \frac{845\,000}{ld/bt} = 520 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{p2} = \left[1.0 - \frac{(l/r)^2}{2C_s^2 C_b} \right] 0.6 \sigma_y$$

En nuestro caso,

$$C_b = 1.0, r = 7.4 \text{ cm}, C_s = 131.7.$$

Sustituyendo valores:

$$\sigma_{p2} = \left[1.0 - \frac{(800/7.4)^2}{2 \times 131.7^2} \right] 0.6 \times 2320 = 930 \text{ kg/cm}^2$$

A continuación presentamos un resumen de los resultados obtenidos:

	Método exacto (ec. 21)	Ec. 31	AISC 1949	AISC 1961
Esfuerzo de trabajo (kg/cm ²)	828	960	520	930
% error (respecto a ec. 21)	—	+ 15.9	- 37.3	+ 12.3

Tomando como base de comparación el esfuerzo calculado con la ec. 21 vemos que las especificaciones AISC de 1949 daban resultados exageradamente conservadores, ya que estaban basadas en la fórmula de De Vries, que desprecia términos de importancia fundamental en el caso de traves armadas.

La ec. 31 y las especificaciones AISC de 1961 nos dan, en este caso particular, valores prácticamente iguales, ligeramente mayores que el dado por la ec. 21, debido a que despreciamos el efecto desfavorable de la carga aplicada en el patín superior de la trabe.

EJEMPLO 3

Calcular el esfuerzo permisible por pandeo lateral para una vigueta l de 15" Liv. de 12 m de claro, libremente apoyada en los extremos y sin ningún soporte lateral entre ellos. Sobre la viga obra una carga concentrada, aplicada en el punto medio del claro y en el patín inferior. Supóngase que el acero de la viga es A-36.

a) Método "exacto" (ec. 21)

$$\sqrt{EI_y GJ} = E \sqrt{\frac{I_y J}{2.6}}$$

$$= 2039 \times 10^4 \sqrt{\frac{608.5 \times 65.34}{2.6}} = 251 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

De la fig. (10):

$$K = 1.0, C_1 = 1.35, C_2 = 0.55$$

$$C_w = \frac{608.5 \times 36.5^2}{4} = 201\,000 \text{ cm}^4$$

$$\frac{C_w E}{GJ} = \frac{2.6 C_w}{J} = 8000$$

Sustituyendo en la ec. 22, y anteponiendo el signo + al segundo término del paréntesis por estar la carga aplicada en el patín inferior de la vigueta, obtenemos

$$C_s = 1.35 \times 3.14 \left[\sqrt{1 + \frac{3.14^2}{1200^2} \times 8000 (0.55^2 + 1)} + \frac{0.55 \times 3.14}{1200} \sqrt{8000} \right] = 4.95$$

Aplicando la tabla II, e interpolando linealmente, se obtiene exactamente el mismo valor de C_s , que también puede obtenerse por medio de la curva 3A de la fig. 11.

De la ec. 21,

$$\sigma_{cr} = \frac{4.95 \times 251 \times 10^6}{960.2 \times 1200} = 1070 \text{ kg/cm}^2 < \sigma_{L.P.}$$

$$\sigma_p = \frac{1070}{1.65} = 650 \text{ kg/cm}^2$$

b) Método basado en la ec. 29

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\left[\frac{0.69E}{ld/bt}\right]^2 + \left[\frac{0.71E}{(l/b)^2}\right]^2} \quad (29)$$

$$\left(\frac{l}{b}\right)^2 = \left(\frac{1200}{14.0}\right)^2 = 7380$$

$$\frac{ld}{bt} = \frac{1200 \times 38.1}{14.0 \times 1.58} = 2060 ;$$

$$\frac{0.69E}{ld/bt} = 680 \text{ kg/cm}^2 ; \frac{0.71E}{(l/b)^2} = 196 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{cr} = \sqrt{(680)^2 + (196)^2} = 710 \text{ kg/cm}^2$$

Corregiremos este resultado, teniendo en cuenta que la viga no está trabajando a flexión pura, utilizando la curva 3A de la fig. 12.

$$\frac{a}{l} = \frac{\sqrt{8000}}{1200} = 0.075 ,$$

$$C_1/C_1 \text{ para flexión pura} = 1.2$$

$$(\sigma_{cr})_{real} = 710 \times 1.2 = 854 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_p = \frac{854}{1.65} = 550 \text{ kg/cm}^2$$

c) Especificaciones AISC anteriores a 1961

$$\sigma_p = \frac{845\,000}{2060} = 409 \text{ kg/cm}^2$$

d) Especificaciones AISC de 1961 y Proyecto de Reglamento del D. F.

$$\sigma_{p1} = 409 \text{ kg/cm}^2$$

El valor de r que debe utilizarse en la segunda fórmula es, aproximadamente, 3.2 cm.

$$\sigma_{p2} = \left[1.0 - \frac{(1200/3.2)^2}{2 \times 131.7^2}\right] 1400$$

Se obtiene un valor negativo, luego:

$$\sigma_p = \sigma_{p1} = 409 \text{ kg/cm}^2$$

Resumiendo, los resultados obtenidos son:

	Método exacto (Ec. 21)	Ec. 29	AISC 1949	AISC 1961
Esfuerzo de trabajo (kg/cm ²)	650	550	409	409
% error (respecto a ec. 21)	—	—15.4	—37.2	—37.2

En este ejemplo todas las fórmulas aproximadas dan resultados del lado de la seguridad, exageradamente bajos al aplicar las especificaciones; esto se debe, entre otros factores, a que hemos ignorado el efecto estabilizador de la carga aplicada en el patín inferior ya que, si lo tomamos en cuenta, los esfuerzos permisibles aumentan aproximadamente en 20%, o sea a $409 \times 1.2 = 490 \text{ kg/cm}^2$, valor bastante cercano al dado por la ec. 29.

Si la carga estuviese aplicada en el patín superior, se obtendrían los resultados siguientes

$$C_1 = 4.25 (1035 - 0.128) = 3.85 ,$$

$$\sigma_p = 505 \text{ kg/cm}^2$$

Los demás valores permanecen iguales, puesto que en su obtención no se toma en cuenta la posición de la carga; las diferencias entre ellos y el resultado de aplicar la ec. 21 disminuyen notablemente.

TRABES SIMÉTRICAS ALREDEDOR DEL EJE "Y" Y ASIMÉTRICAS ALREDEDOR DEL "X"

El caso más común en traves de este tipo es que el patín comprimido tenga dimensiones mayores que el de tensión, como sucede a veces en traves carril para soporte de grúas viajeras; llega a presentarse, como caso extremo, aquel en que el patín de tensión no existe, cuando se emplean como vigas secciones T o formadas por dos ángulos espalda con espalda.

Los resultados de muchas de las investigaciones teóricas realizadas sobre el pandeo lateral de vigas pueden expresarse por medio de la ecuación siguiente^{2,16}, aplicable a secciones con uno solo o con dos ejes de simetría y que es, de hecho, una forma más general de las ecuaciones que hemos utilizado hasta ahora.

$$\sigma_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_y}{S_x (KI)^2} \left[C_2 g + C_3 j + \sqrt{(C_2 g + C_3 j)^2 + \frac{C_4}{I_y} \left(1 + \frac{GJ (KI)^2}{\pi^2 EC_w}\right)} \right] \quad (47)$$

Los símbolos que aparecen en esta ecuación y que no han sido utilizados con anterioridad son

C_2 — Coeficiente que depende de la carga y de las restricciones en los apoyos válido únicamente para secciones asimétricas alrededor de X , ya que J es nulo en el caso de secciones simétricas (Ver fig. 22).

e — Distancia entre el centroide de la sección transversal y el centro de torsión.

positiva cuando este último se encuentra entre el centroide y el patin de compresión y negativa en caso contrario.

g — Distancia entre el centro de torsión y el punto de aplicación de la carga transversal, positiva cuando la carga está debajo del centro de torsión y negativa en caso contrario. (Desde luego, esta cantidad vale cero cuando la carga está aplicada sobre el eje de las y).

S_c — Módulo de sección para el borde comprimido.

$$j = e + \frac{1}{2I_x} \int_1 y (x^2 + y^2) dA$$

La fig. 22 representa el tipo modificado de sección I a que se refiere la ec. 47 y en ella están anotadas las fórmulas para el cálculo de las propiedades necesarias de la sección.

Cuando la viga está sometida a flexión uniforme, $g = 0$ y C_1 y C_3 son iguales a la unidad. Si, como una simplificación, se toma j igual a e , la ec. 47 adopta la forma siguiente^{2, 16}

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{S_c (Kl)^2} \left[e + \sqrt{e^2 + \frac{C_w}{I_y} \left(1 + \frac{GI(Kl)^2}{\pi^2 EC_w} \right)} \right] \quad (48)$$

Comparando esta última ecuación con la exacta, se encuentra que proporciona valores de σ_{cr} del lado de la seguridad cuando el patin de compresión es mayor que el de tensión y valores demasiado altos de σ_{cr} en caso contrario.

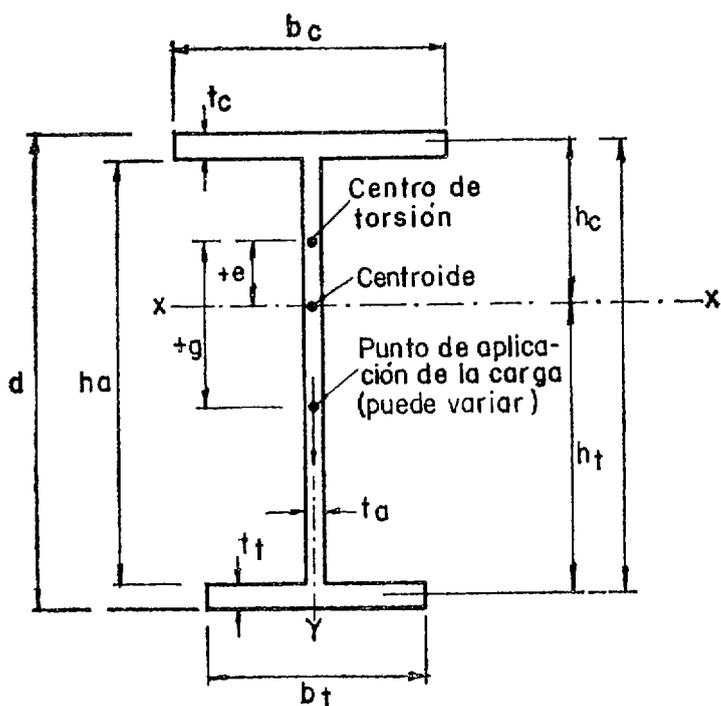


FIGURA 22

Areas

$$A_c = b_c t_c$$

$$A_t = b_t t_t$$

$$A_a = h_a t_a$$

$$A = A_c + A_t + A_a$$

Centroide

$$h_c = \frac{1}{A} \left[A_t h + \frac{A_a}{2} (h_a + t_c) \right]$$

Momento de inercia alrededor del eje y

$$I_c = \frac{A_c b_c^2}{12} \quad I_t = \frac{A_t b_t^2}{12}$$

$$I_y = I_c + I_t$$

Momento de inercia alrededor del eje x

$$I_x = A_c h_c^2 + A_t h_t^2 + \frac{A_a h_a^2}{12} + A_a \left[\frac{h_a + t_c}{2} - h_c \right]^2$$

Módulos de sección

$$S_c = \frac{I_x}{h_c + t_c/2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{determina} \\ \sigma_{cr} \end{array} \right.$$

$$S_t = \frac{I_x}{h_t + t_t/2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{necesario para checar,} \\ \text{los esfuerzos de tensión} \end{array} \right.$$

Centro de torsión

$$e = \frac{I_c h_c - I_t h_t}{I_y}$$

Constantes

$$j = e + \frac{1}{2I_x} \left[h_t \left(I_t + A_t h_t^2 + \frac{h_t^3 t_a}{4} \right) - h_c \left(I_c + A_c h_c^2 + \frac{h_c^3 t_a}{4} \right) \right]$$

$$J = \frac{1}{3} \left[b_c t_c^3 + b_t t_t^3 + h_a t_a^3 \right] - 0.21 t_c^4 - 0.21 t_t^4$$

$$C_a = \frac{h^2 I_c I_t}{I_y}$$

Por otro lado, si en la ec 47 se sustituye j por la expresión $h(I_c - I_t)/2I_v$ se llega a otra expresión aproximada, la ec. 49, que al contrario de la (48), proporciona valores demasiado elevados cuando el patín de compresión es mayor que el de tensión, pero aceptables y del lado de la seguridad en el caso contrario^{2,10}.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E d}{2S_c (KI)^2} \left[I_c - I_t + I_v \sqrt{1 + \frac{4GJ(KI)^2}{\pi^2 I_v E d^2}} \right] \quad (49)$$

Puesto que la solución real está comprendida entre los resultados dados por (48) y (49), un promedio de ambos da un valor más preciso, muy cercano al exacto.

En los casos particulares en que los patines sean de forma rectangular, con mayor área en el de compresión que en el de tensión, las ecuaciones siguientes, dadas en función de las relaciones l/b y l/r_v , respectivamente, proporcionan resultados que concuerdan aceptablemente con la solución exacta².

$$\sigma_{cr} = \frac{0.48E}{(l/b)^2} \left[0.6 + \sqrt{0.75 + \frac{(l/b)^2}{(d/t)^2}} \right] \quad (50)$$

$$\sigma_{cr} = \frac{5.75E}{(l/r_v)^2} \left[0.6 + \sqrt{0.75 + \frac{(l/r_v)^2}{12(d/t)^2}} \right] \quad (51)$$

En estas expresiones, b , t y r_v se refieren, exclusivamente, al patín de compresión; por consiguiente, son independientes de las dimensiones del de tensión. Sin embargo, dan resultados suficientemente correctos en todo el rango de secciones para el que han sido probadas¹⁰. El valor de σ_{cr} es hasta 1.5% demasiado alto cuando los dos patines, de tensión y compresión, tienen la misma área, y hasta 31% demasiado bajo en el caso extremo en que el patín de tensión no existe².

De acuerdo con las especificaciones del AISC de 1961 los miembros que estamos estudiando, asimétricos respecto al eje x , pero con un eje y de simetría, se tratan exactamente igual que las secciones con dos ejes de simetría⁴.

En el Proyecto de Reglamento de las Construcciones en el Distrito Federal⁶ se sigue el mismo criterio, con la única diferencia de que en el caso de secciones sin patín de tensión (secciones T o formadas por dos ángulos espalda con espalda) se recomienda que el esfuerzo crítico se determine utilizando las fórmulas para el pandeo de columna, tomando como radio de giro el del patín de compresión únicamente.

En las figs. 23 y 24 puede verse, para dos perfiles escogidos al azar, que este criterio da resultados apreciablemente del lado de la seguridad (tomando como base la ec. 51) para el caso de piezas largas, que se pandean elásticamente, pero muy aceptables para piezas cortas, de las longitudes usuales en perfiles de este tipo.

En cambio, los resultados de las especificaciones del AISC son totalmente inaceptables, pues están

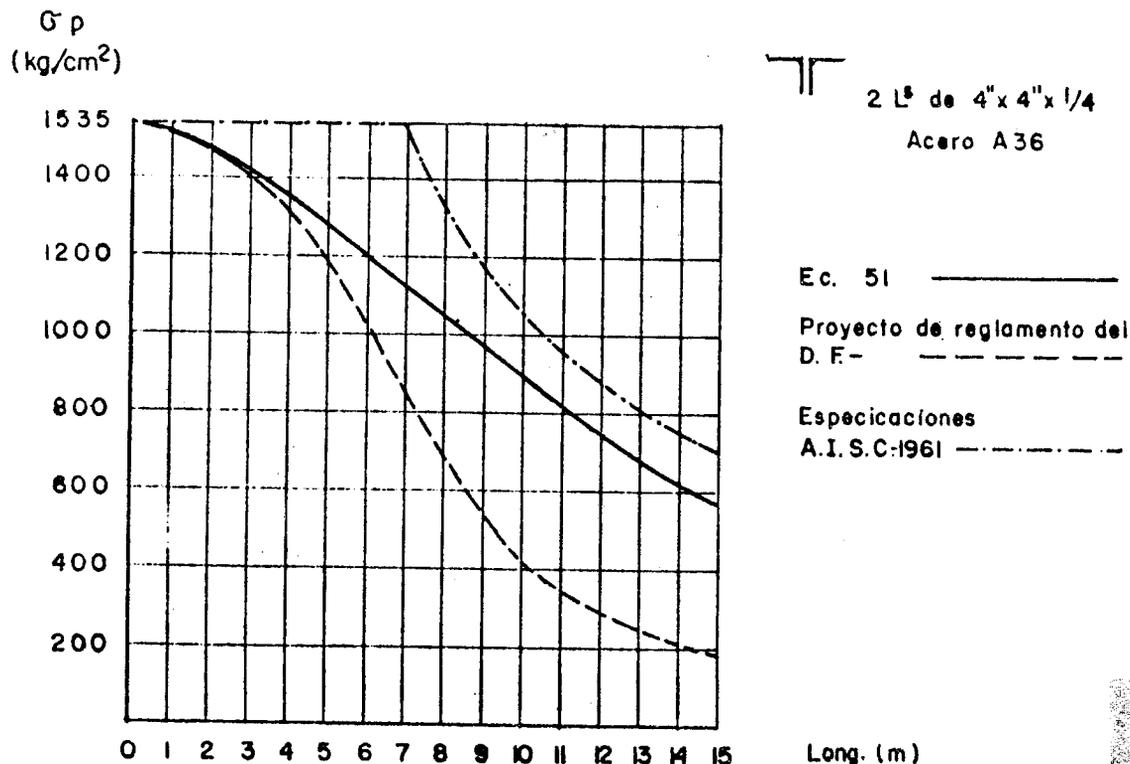


FIGURA 23

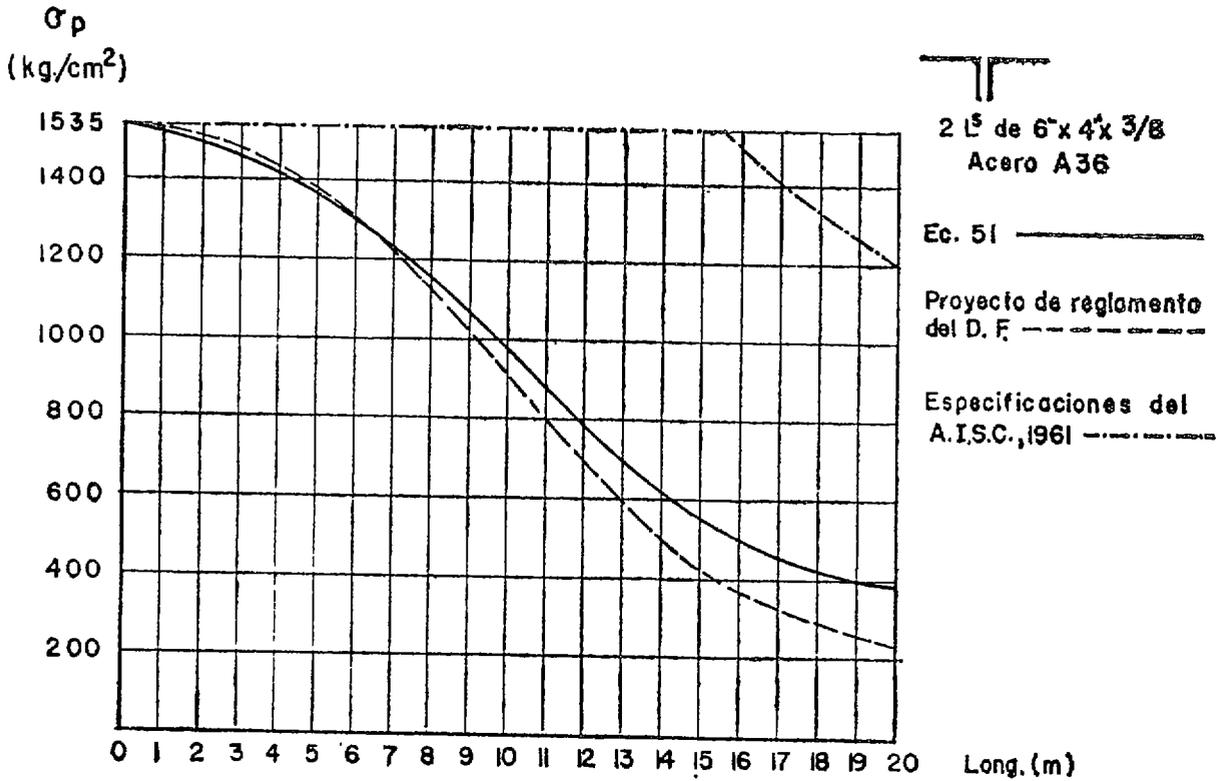


FIGURA 24

tomando en cuenta la acción estabilizadora de un patín de tensión que no existe.

TRABES CON DOS EJES DE SIMETRIA Y CON PATINES DE SECCION TRANSVERSAL VARIABLE²

En general, el contraventeo existente en trabes de este tipo es tal que cada uno de los tramos comprendidos entre puntos fijos lateralmente puede considerarse de sección constante. Sin embargo, durante el montaje, antes de la colocación del contraventeo y en algunas situaciones especiales en que no se proporcione ningún soporte lateral, se puede hacer una estimación razonable de la resistencia de la trabe utilizando la expresión

$$\sigma'_{cr} = \sigma_{cr} \sqrt{\frac{I_{mín}}{I_{máx}}} \quad (52)$$

en la que σ'_{cr} es el esfuerzo crítico estimado para la trabe de sección variable y σ_{cr} es el valor correspondiente para una sección constante de $I = I_{máx}$, calculado por cualquiera de los métodos estudiados en páginas anteriores.

La ec. 52 no debe considerarse como una solución definitiva de este problema, sino como una regla de diseño sencilla y conservadora, útil mientras no se disponga de información adicional.

CANALES Y SECCIONES Z

Las canales sometidas a flexión se utilizan por lo general únicamente como miembros secundarios.

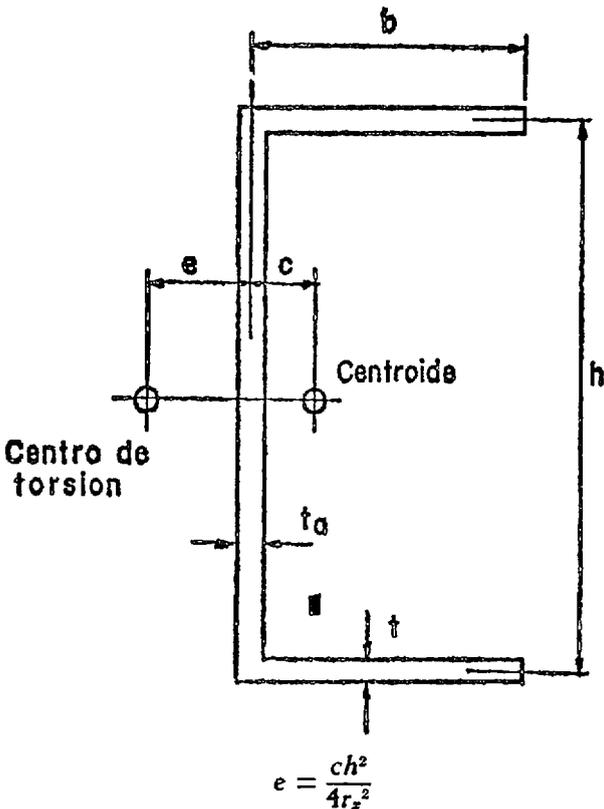
En ese caso, suelen recibir soporte lateral adecuado de la losa, cubierta o pared que se apoya sobre ellas, de manera que pueden diseñarse para el esfuerzo permisible total.

Por otro lado, cuando reciben cargas concentradas a través de otros miembros estructurales que se apoyan en ellas, éstos suelen proporcionar un soporte lateral y torsional suficiente para que el esfuerzo permisible pueda calcularse en función de la distancia entre puntos de apoyo utilizando las mismas fórmulas que para secciones I.

Debe recordarse, sin embargo, que el centro de torsión de las canales se encuentra fuera del plano del alma, de manera que cuando se aplican las cargas sin proporcionar al mismo tiempo el soporte lateral y torsional, el efecto de la excentricidad de la carga debe tenerse en cuenta en el cálculo de esfuerzos.

En la fig. 25 se indica la posición del centro de torsión y los valores de las constantes C_{10} y J para una canal simplificada².

Tanto las especificaciones del AISC como las del Proyecto del Reglamento de las Construcciones del D. F.^{4,5}, indican que se emplee la ec. 34 para el cálculo del esfuerzo permisible en el patín comprimido de canales sometidas a flexión; sin embargo, si se desea pueden emplearse las ecuaciones que toman en cuenta la rigidez lateral adicional proporcionada por los patines, empleando el valor de C_{10} dado en la fig. 25. Las modificaciones que sean necesarias por las restricciones existentes en los apoyos, posición de la carga y comportamiento inelástico se efectuarán de la misma manera que en el caso de secciones I.



$$e = \frac{ch^2}{4r_x^2}$$

$$C_w = \frac{h^2 I_y}{4} \left[1 - \frac{c(e-c)}{r_y^2} \right]$$

$$I \doteq \frac{1}{3} (2bt^3 + ht^3)$$

FIGURA 25

Si siguiendo un criterio análogo, el AISI especifica exactamente las mismas fórmulas para el cálculo del esfuerzo permisible por flexión para secciones en canal que para secciones I^{12} .

Las secciones Z laminadas o formadas por placas soldadas prácticamente no se emplean; sin embargo, se utiliza con cierta frecuencia ese tipo de secciones hechas con lámina delgada; en vista de que su resistencia al pandeo lateral es menor que la de las secciones I , pero varía sustancialmente dependiendo de los detalles de la forma de la sección y teniendo en cuenta además, que su empleo es bastante reducido, el AISI especifica esfuerzos conservadores, de la mitad de los permitidos para secciones I en el rango elástico y sustancialmente reducidos también, siguiendo curvas de transición, para relaciones de esbeltez menores^{12,15}.

APOYO LATERAL INTERMITENTE Y CONTINUO Y EFECTO DEL RECUBRIMIENTO DE CONCRETO²

Un piso continuo y suficientemente rígido, ligado correctamente al patín de compresión de

una viga, proporciona a éste un apoyo lateral continuo y elimina la necesidad de reducir los esfuerzos permisibles en flexión; un caso típico lo proporciona una losa de concreto en la que esté ahogado el patín.

Si el patín de compresión está soportado en puntos intermedios por medio de contraventeos especiales o por las vigas que se apoyan en la trabe en consideración, los esfuerzos permisibles a flexión deben determinarse tomando como longitud no soportada la distancia entre puntos de contraventeo.

Los apoyos laterales deben poseer, simultáneamente, resistencia y rigidez adecuadas. La primera no puede calcularse más que suponiendo curvaturas iniciales o faltas de alineamiento en la viga, pues si ésta es perfectamente recta no es posible determinar el valor de las fuerzas laterales de sustentación, de tal manera que el requisito de diseño para el soporte no es resistencia, sino rigidez.

Se han efectuado estudios^{17,18}, para obtener métodos sencillos que permitan determinar los requisitos mínimos que deben satisfacer los apoyos laterales, tanto continuos como intermitentes. Aunque estos estudios no pueden considerarse ni con mucho completos, parecen confirmar la regla de diseñar cada apoyo intermitente con el 2% de la fuerza total de compresión existente en el patín comprimido de la viga en estudio^{2,18}.

Cuando se tiene una viga, no soportada lateralmente, recubierta con concreto para fines de protección contra el fuego, por ejemplo, y provisto de un refuerzo adecuado para mantenerlo fijo correctamente a la viga, la resistencia al pandeo lateral se incrementa considerablemente, en general lo suficiente para permitir que el diseño se lleve a cabo con el esfuerzo permisible máximo, como si existiese un apoyo lateral continuo. En estos casos, puede considerarse conservadoramente la viga como una trabe de acero de sección transversal rectangular, de peralte igual al de la sección de concreto y de ancho igual al de ésta dividido entre la relación entre los módulos de elasticidad de acero y concreto².

PANDEO LATERAL EN ESTRUCTURAS DISEÑADAS PLÁSTICAMENTE

En estructuras diseñadas plásticamente debe garantizarse que las diferentes secciones en que aparecen articulaciones plásticas sean capaces de experimentar las rotaciones necesarias para la formación del mecanismo de colapso, sin que su momento plástico resistente disminuya.

Uno de los factores que puede originar una disminución de ese momento plástico resistente es la presentación de fenómenos de pandeo lateral en las zonas de formación de articulaciones, por lo que en ellas deberán tomarse precauciones especiales de contraventeo; en el resto de la estructura bastará con utilizar los mismos criterios que en un diseño elástico.

Dado que el establecimiento del criterio para el contraventeo en las zonas de aparición de articulaciones plásticas requiere la presentación previa de varios conceptos referentes tanto a los métodos de análisis plástico como al comportamiento de los perfiles de acero al plastificarse gradualmente bajo la acción de un momento flexionante creciente, dejaremos este tema para un artículo posterior; sin embargo, el lector interesado puede consultar las refs. 4, 19, 20 y 21.

Reconocimiento — El autor agradece a los señores Emilio Rosenblueth y Daniel Ruiz el interés con que leyeron el manuscrito y las valiosas sugerencias que hicieron, así mismo, quiere hacer patente su agradecimiento al Ing. Félix Colinas, ya que las discusiones surgidas durante el trabajo en común han contribuido en gran parte a darle a este artículo su forma final.

REFERENCIAS

1. Timoshenko, S. P., y Gere, J. M., "Theory of Elastic Stability", Engineering Societies Monograph, McGraw-Hill Book Company, 1961.
2. "Guide to Design Criteria for Metal Compression Members", Column Research Council, Engineering Foundation, 1960.
3. de Buen, O., "Diseño de Columnas de Acero Cargadas Axialmente", Revista *Ingeniería*, Vol. XXXIII, No. 2, México, abril 1963.
4. "Specification for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings", AISC, 1961.
5. *Proyecto del Reglamento de las Construcciones en el Distrito Federal*, capítulo de Estructuras Metálicas, 1962.
6. Bleich, F., "Buckling Strength of Metal Structures", Engineering Societies Monograph, McGraw-Hill Book Company, 1952.
7. de Vries, K., "Strength of Beams as determined by Lateral Buckling", *Trans. ASCE*, Vol. 112 (1947), p. 1245.
8. Chang, F. K., y Johnston, B. G., "Torsion of Plate Girders", *Trans. ASCE*, Vol. 118 (1953), p. 337.
9. "Manual para Constructores", Cia. Fundidora de Hierro y Acero de Monterrey, S. A., 1950.
10. Lothers, J. E., "Advanced Design in Structural Steel", Prentice-Hall, Inc., 1960.
11. Winter, G., "Discussion of Strength of Beams as determined by Lateral Buckling, by K. de Vries", *Trans. ASCE*, Vol. 112, p. 1272 (1947).
12. "Light Gage Cold-Formed Steel Design Manual", American Iron and Steel Institute, Nueva York, 1962.
13. Basler, K., y Thurlimann, B., "Strength of Plates Girders in Bending", *Proc. ASCE*, Vol. 87, St6, 1961 (Puede obtenerse también como Fritz Laboratory Report No. 251-19, Lehigh University, Nov. 1960).
14. "Specification for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings", AISC, 1949.
15. Comentario sobre la edición 1962 del "Manual de Diseño de Secciones de Lámina de Acero doblada en Frio", AISI, Nueva York, 1962.
16. J. W. Clark y H. N. Hill, "Lateral Buckling of Beams", *Trans. ASCE*, Vol. 127, Part. II, 1962 (Column Research Council Symposium on Metal Compression Members).
17. Winter, G., "Lateral Bracing of Columns and Beams", *Trans. ASCE*, Vol. 125, Part. I, 1960, p. 807.
18. Zuk, W., "Lateral Bracing Forces on Beams and Columns", *J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE*, Vol. 82, EM3 (Jul., 1956).
19. "Commentary on Plastic Design in Steel", ASCE, Manual of Engineering Practice No. 41, 1961.
20. Massonnet, Ch., y Save, M., "Calcul Plastique des Constructions", Centre Belgo-Luxembourgeois d'Information de l'Acier, Bruxelles, 1961.
21. Beedle, L. S., "Plastic Design of Steel Frames", John Wiley and Sons, New York, 1958.

Instituto de Ingeniería
División de Investigación de la Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional Autónoma de México
Ciudad Universitaria, México 20, D. F.
MEXICO