

MODELOS FLUVIALES

J. A. Maza A.*

*Profesores Investigador, Facultad de Ingeniería, UNAM

	RESUMEN	
1.	INTRODUCCION	1
2.	MODELOS FLUVIALES DE FONDO FIJO	2
2.1	<u>Valores de las escalas</u>	3
2.2	<u>Procedimiento de cálculo para una sección cualquiera</u>	9
2.3	<u>Calibración del modelo</u>	9
2.4	<u>Aparatos de medición</u>	11
3.	MODELOS FLUVIALES DE FONDO MOVIL	12
3.1	<u>Método de la velocidad de caída</u>	14
3.3	<u>Método de Einstein - Chien</u>	29
	BIBLIOGRAFIA	51
	FIGURAS	53

ABSTRACT

In this article, characteristics of the models with movable and fixed bed are described, and their utility is indicated.

It is shown the way to obtain the relations between different scales when the fixed bed model is distorted or undistorted.

As it is known, the operation and computation of a movable bed model is more complex. Four different methods to obtain the scales relations are pointed out as well as their advantages and inconvenients.

Finally, the method commonly used by the Institute of Engineering for calibrating rapidly and efficiently movable bed models is included.

RESUMEN

En este trabajo se describen los modelos fluviales de fondo fijo y móvil y se indica la utilidad de cada uno de ellos.

Se muestra la forma de calcular las relaciones de escala cuando el modelo de fondo fijo es distorsionado o sin distorsión y se describe la forma de calibrarlos.

El cálculo y operación de un modelo de fondo móvil es más complicado. Se muestran cuatro métodos para obtener las relaciones entre las escalas y se indican las ventajas e inconvenientes de cada uno de ellos.

Por último se describe el método seguido en el Instituto de Ingeniería para calibrar, en una forma más rápida y eficiente, a los modelos con fondo móvil.

1. INTRODUCCION

Los modelos fluviales permiten estudiar el comportamiento, condiciones hidráulicas y evolución de una corriente natural.

De acuerdo con el material de construcción, los modelos fluviales se dividen en modelos de fondo fijo y de fondo móvil.

Los de fondo fijo son utilizados cuando se requiera conocer las características hidráulicas de un cauce, durante un periodo corto de tiempo, y se tenga la certeza de que el efecto causado por la corriente contra el fondo no sea de consideración. Por ejemplo, se pueden emplear para obtener los niveles de la superficie del agua en un tramo de un río durante una avenida, conocer las líneas de corriente o la distribución de velocidades al construirse una obra.

Los modelos de fondo móvil permiten estudiar problemas en los que la corriente altera las condiciones del fondo y las orillas de un cauce natural; en otras palabras, donde los fenómenos de erosión, arrastre y depósitos sean de

importancia. Por ejemplo, se utilizan para observar el desarrollo de los meandros de un río, estudiar la mejor manera de rectificar el cauce y proteger sus orillas, así como resolver problemas de erosión y encontrar formas de evitarla o reducirla.

Como no sólo la técnica de construcción y operación, sino la teoría en que se basan los dos tipos de modelos, es muy diferente, se estudiarán en forma separada.

2. MODELOS FLUVIALES DE FONDO FIJO

Los modelos de fondo fijo son aquellos en los que todas las superficies en contacto con el líquido están formadas por un material que no es alterado por el paso del agua.

La determinación de las escalas de un modelo de fondo fijo se basa en cumplir la condición de Froude entre él y su prototipo; además, debe prestarse especial atención a que la rugosidad requerida en el modelo esté bien representada.

Generalmente los modelos fluviales se emplean para representar tramos de varios kilómetros de ríos; sin embargo, los tirantes de la corriente no llegan a tener sino algunos metros. Si en el modelo se representaran los tirantes con la escala utilizada para las distancias horizontales se obtendrían valores muy pequeños. Para reproducirlos en forma conveniente, sin introducir efectos capilares que alteren los resultados, se escogen dos escalas diferentes; una para las longitudes horizontales y otra para las verticales.

Por lo anterior, los modelos fluviales usualmente son distorsionados. La principal excepción se tiene cuando se estudian erosiones locales, ya

que las distancias horizontales afectadas por el fenómeno son pequeñas.

Otra razón por la que los modelos fluviales deben ser distorsionados es para representar la rugosidad a escala. Esto se verá más claramente al obtener la escala de rugosidades. Cabe hacer notar que rara vez se necesita distorsionar por tal motivo.

2.1 Valores de las escalas

A continuación se indicarán las relaciones entre las diferentes escalas a partir de la condición de Froude y la manera de obtener el valor teórico de la rugosidad del modelo. Al final se describirá la forma de lograr la rugosidad deseada en el laboratorio. Por ser de mayor facilidad, se define como escala a la relación entre una magnitud del prototipo y su correspondiente en el modelo. De esta manera, siempre se utilizan números enteros en lugar de fraccionarios.

Todo el estudio se presenta suponiendo que se trabaja con modelos distorsionados. En estos modelos se tienen dos grados de libertad. Generalmente se escogen en forma independiente la escala de líneas horizontales, L_e , y la de líneas verticales, H_e .

La escala de líneas horizontales se escoge tomando en cuenta el espacio disponible en el laboratorio, procurando que el modelo sea del mayor tamaño posible. Para modelos fluviales el valor de esa escala está comprendido entre 100 y 200.

La escala de líneas verticales se escoge procurando que la distorsión no sea mayor de 10 en modelos de fondo fijo y de 5 en modelos de fondo móvil; que el gasto en el modelo pueda ser dado por el equipo de bombas del laborato-

rio, y que la rugosidad pueda ser reproducida sin dificultad. Casi siempre conviene hacer el estudio para tres a cuatro combinaciones de escalas y escoger la que cumpla más favorablemente con las relaciones anteriores.

La condición de Froude establece que se cumpla la relación ¹

$$\frac{V_e}{\sqrt{g_e H_e}} = 1 \quad (1)$$

pero como $g_e = 1$ se llega a

$$V_e = H_e^{1/2} \quad (2)$$

Al igual que la escala de velocidades, las restantes estarán en función de la escala de líneas.

Los valores de las escalas de mayor interés son:

Escala de áreas

$$A_e = H_e L_e \quad (3)$$

Escala de gastos

$$Q_e = H_e^{3/2} L_e \quad (4)$$

Escala de tiempos para recorridos horizontales de una partícula

$$t_e = L_e H_e^{1/2} \quad (5)$$

Escala de volumen

$$v_e = L_e^2 H_e \quad (6)$$

Escala de pendientes

$$S_e = \frac{H_e}{L_e} \quad (7)$$

La distorsión es igual a

$$\Delta = \frac{L_e}{H_e} = S_e^{-1} \quad (8)$$

Escala de rugosidades

Esta escala se puede obtener a partir de algunas de las fórmulas de fricción para canales, como la fórmula de Chezy, de Manning o la de Keulegan. Se indicará el procedimiento utilizando la fórmula de Manning; aunque para cualquier otra es enteramente similar.

El coeficiente de rugosidad dado por la expresión de Manning es

$$n = \frac{r^{2/3} S^{1/2}}{V} \quad (9)$$

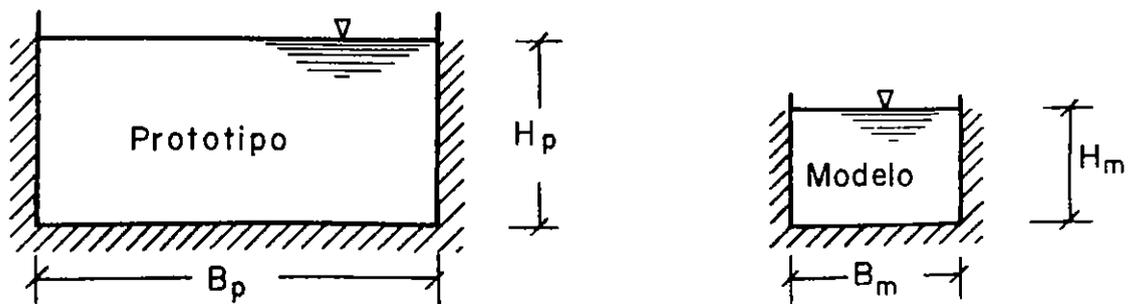
y por lo tanto, la escala de coeficiente de rugosidad

$$n_e = \frac{r_e^{2/3} S_e^{1/2}}{V_e} \quad (10)$$

En la expresión anterior se desconoce el valor de la escala de radios hidráulicos; este depende de la geometría de la sección. Como ilustración del procedimiento de cálculo, se indican los pasos a seguir si la sección del cauce es rectangular; si no lo fuera el procedimiento es semejante.

Sean la sección del prototipo y su correspondiente en el mo-

delo



La escala de radios hidráulicos se escribe como

$$r_e = \frac{r_p}{r_m}$$

$$r_e = \frac{A_p/P_p}{A_m/P_m} = \frac{A_p P_m}{A_m P_p} \quad (11)$$

$$r_e = \frac{B_p H_p (B_m + 2H_m)}{B_m H_m (B_p + 2H_p)} = H_e L_e \frac{B_m + H_m}{B_p + 2H_p}$$

introduciendo L_e en el paréntesis, y sustituyendo a H_m por H_p/H_e

$$r_e = \frac{H_e (1 + 2\Delta H_p/B_p)}{(1 + 2H_p/B_p)} = K H_e \quad (12)$$

donde

$$K = \frac{(1 + 2\Delta H_p/B_p)}{(1 + 2H_p/B_p)} \quad (13)$$

Sustituyendo los valores conocidos en la ec 11, se tiene

$$n_e = \frac{K^{2/3} H_e^{2/3} H_e^{1/2}}{H_e^{1/2} L_e^{1/2}}$$

por lo que

$$n_e = \frac{K^{2/3} H_e^{2/3}}{L_e^{1/2}} \quad (14)$$

Para ver la forma en que varía el valor de la escala de rugosidades, se analiza la ec 14.

Si $L_e = H_e$ se tiene la condición para un modelo no distorsionado, $K = 1$ y por lo tanto

$$n_e = L_e^{1/6} \quad (15)$$

La ec 15 indica que n_e tiene un valor mayor que uno, por lo que la rugosidad en el modelo siempre será menor que en el prototipo. En ocasiones, cuando L_e es grande puede necesitarse una rugosidad tan pequeña en el modelo que no alcance a ser reproducida. Cuando eso ocurre, conviene cambiar el valor de L_e , o bien distorsionar el modelo.

Supóngase ahora que el modelo es distorsionado y que en la sección rectangular del prototipo se tiene una relación de $\frac{H_p}{B_p}$ muy pequeña.

Si

$$H_p/B_p \rightarrow 0 \quad (16)$$

$$K \rightarrow 1$$

por lo tanto, de la ec 12

$$r_e \rightarrow H_e \quad (17)$$

lo cual se cumple cuando $H_p/B_p < 0.1$, en donde el radio hidráulico es prácticamente igual al tirante.

De lo anterior, n_e puede alcanzar el valor extremo de

$$n_e = \frac{H_e^{2/3}}{L_e^{1/2}} \quad (18)$$

Si por el contrario, se trabaja con una sección muy estrecha, en que el río esté encañonado, H_p/B_p alcanza un valor grande. Como puede obtenerse de las ecs 12 y 13

$$K \rightarrow \Delta \quad (19)$$

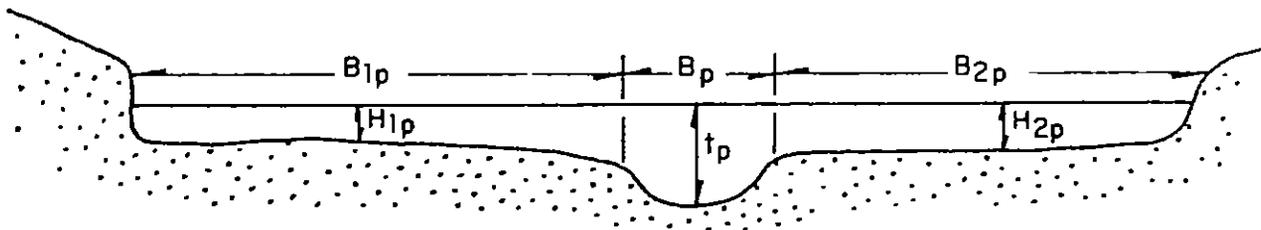
$$r_e \rightarrow L_e$$

y por lo tanto n_e puede adquirir el valor extremo de

$$n_e = L_e^{1/6} \quad (20)$$

Al comparar las ecs 17 y 19 se observa que el valor de la escala de radios hidráulicos oscila entre el de la escala de líneas verticales y el de las horizontales, y que ese cambio es debido a la relación entre el tirante y ancho de la corriente, la cual puede variar de sección a sección.

Lo anterior obliga teóricamente a que en un tramo de río se represente cada sección con su rugosidad correspondiente. En un problema real, y para alcanzar la exactitud deseada, se utiliza una rugosidad promedio en el modelo dentro del cauce principal del río. Sin embargo, en casi todos los problemas con modelos fluviales se necesitan representar dos rugosidades diferentes como mínimo; una en el cauce normal o principal del río, y otra en el cauce de inundación o avenidas.



Supóngase un cauce como el anterior, en el cual el coeficiente de rugosidad sea constante en toda la sección e igual a n_p .

El coeficiente de rugosidad n_m para el cauce principal dependerá de la relación t_p/B_p

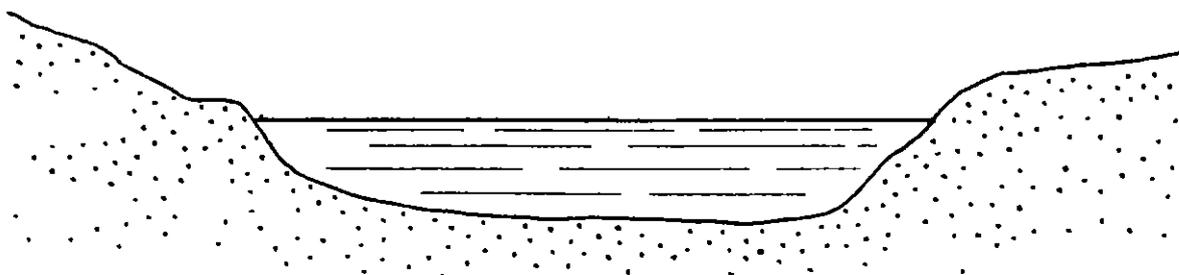
Conocido este valor se calculan K , r_e y n_e .

Del valor de n_e se despeja el del coeficiente de rugosidad en el modelo.

En forma análoga se procede para obtener n_{1m} y n_{2m} , los que dependerán de las relaciones H_{1p}/B_{1p} y H_{2p}/B_{2p}

2.2 Procedimiento de cálculo para una sección cualquiera

Si la sección transversal del cauce en estudio es trapecial, como sucede en los canales, el procedimiento de cálculo es igual al descrito. Únicamente las expresiones de r_e , K y n_e resultan más complicadas. En la mayoría de los cauces naturales no se puede asimilar la sección a ninguna geometría conocida, sino que será como la mostrada a continuación.



Cuando se trabaja con una sección como la anterior, las áreas hidráulicas del modelo y del prototipo se obtienen con ayuda de un planímetro, y se miden directamente los perímetros mojados. Los valores obtenidos se sustituyen en la ec 12 con lo que se calcula el valor de r_e y con este, el de n_e .

Hasta este momento se ha cumplido con la condición de Froude. Como puede demostrarse, no es posible que el modelo cumpla también con la condición de Reynolds. Sin embargo, como el escurrimiento es turbulento en el prototipo, se debe asegurar que al menos en el modelo también lo sea, aunque el número de Reynolds sea menor. Así, el número de Reynolds en el modelo cuando el escurrimiento es libre debe ser mayor de 1 400.

2.3 Calibración del modelo

Hasta ahora se ha descrito únicamente cómo obtener el valor teórico de la rugosidad en el modelo. A continuación se mencionará la manera de

construir el modelo con una rugosidad deseada.

Si se sigue el procedimiento que se menciona en este escrito, se requiere el uso de un canal de ancho B y pendiente S constantes.

A lo largo del canal se colocarán dos limnómetros separados entre sí una distancia conocida, procurando que se encuentren alejados de los extremos del canal. Así, por ejemplo, para un canal de 16 m de longitud, los limnómetros pueden estar separados entre sí 10 m. A todo lo largo del canal se da el mismo acabado o rugosidad a las paredes, y al final se coloca una compuerta que servirá para controlar los niveles del agua en la segunda sección de control. El procedimiento para conocer n_m es el siguiente: se hace pasar por el canal un gasto Q cualquiera. Se mide el tirante en el limnómetro 1 y ese mismo valor se trata de colocar en la sección 2, para lo cual se hace uso de la compuerta. Al mover la compuerta para hacer al tirante H_2 igual al H_1 inicial, el tirante en la sección 1 cambiará. Se repite el procedimiento durante 2 ó 3 tanteos hasta obtener que H_1 sea igual a H_2 .

Al lograr lo anterior se puede conocer la velocidad puesto que

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{BH} \quad (21)$$

De la fórmula de Manning se despeja el valor de n y se sustituyen los valores conocidos

donde

$$n_m = \frac{r^{2/3} S^{1/2}}{V}$$

S es conocida

V se ha calculado

$$r = \frac{BH}{B + 2H}$$

Si el valor de n_m es diferente al calculado para el modelo, por ejemplo si es menor, se dará otro acabado a las paredes y fondo del canal de prueba, para hacerlo más rugoso. Esto se puede lograr rayando al cemento uniformemente, antes de fraguar, o pegando arena gruesa o grava a las paredes; o en casos extremos, colocando dentro de la corriente con regularidad, láminas o mallas separadas convenientemente.

Cuando se logra en el canal la rugosidad deseada, se reproduce el mismo acabado en el modelo propiamente dicho.

Al introducir los obstáculos anteriores dentro de la corriente, las líneas de flujo son diferentes de las del prototipo, lo cual no resulta de importancia para este tipo de estudios, en los que se desea conocer principalmente las elevaciones del agua en distintos puntos y para diferentes gastos. En las figs 1 y 2 se pueden ver dos modelos con rugosidad artificial lograda con láminas metálicas.

2.4 Aparatos de medición

En los modelos fluviales de fondo fijo, se utilizan generalmente los siguientes dispositivos de medición.

1.- Uno o varios vertedores para conocer el gasto:

Uno si es únicamente una corriente la que está bajo estudio, y varios, de acuerdo con el número de afluentes representados en el modelo.

2.- Limnímetros o limnigrafos colocados en todas aquellas secciones o puntos donde interese conocer las elevaciones del agua.

- 3.- Equipo fotográfico con el que se registran las trayectorias de partículas, cuando eso pueda ser dado por el modelo, zonas de inundación, acabado del modelo, etc.
- 4.- Micromolinetes para registrar la magnitud de la velocidad. En ocasiones interesa conocer la velocidad en varios puntos de una misma sección para obtener su distribución.

3. MODELOS FLUVIALES DE FONDO MOVIL

Los modelos de fondo móvil son aquellos en que la frontera en contacto con el líquido está reproducida por un material capaz de ser movido, arrastrado y depositado por el agua.

El diseño y operación de un modelo de este tipo es mucho más difícil y trae consigo más incertidumbres que el diseño y operación de un modelo de fondo fijo, en el cual la única complicación real es creada por la necesidad de ajustar la rugosidad en el modelo. Dos son las dificultades principales que se presentan al construir y operar un modelo de fondo móvil. Por un lado, el modelo debe reproducir el movimiento del material de fondo así como el movimiento del agua en el prototipo; por otro, la rugosidad del fondo no puede ser controlada o colocada de antemano por el operador del modelo, sino que dependerá del estado de movimiento y de las dimensiones de las partículas del fondo.

Otro problema que se presenta al aumentar la distorsión en un modelo de fondo móvil, es que la pendiente de las orillas se incrementa más allá del ángulo estable del material, de tal manera que no pueden sostenerse. Un remedio

posible será hacer las orillas del cauce de un material rígido, pero esto sólo podrá ser permitido si los márgenes del prototipo son estables y no se desea estudiar el efecto de la corriente contra ella.

Los modelos fluviales generalmente son distorsionados y otro efecto de la distorsión es el incremento de la pendiente del modelo.

Como la distorsión es siempre positiva y mayor que uno, $S_e = 1/$, siempre será menor que uno. Puesto que $S_m = S_p/S_e$, S_m siempre será mayor que S_p .

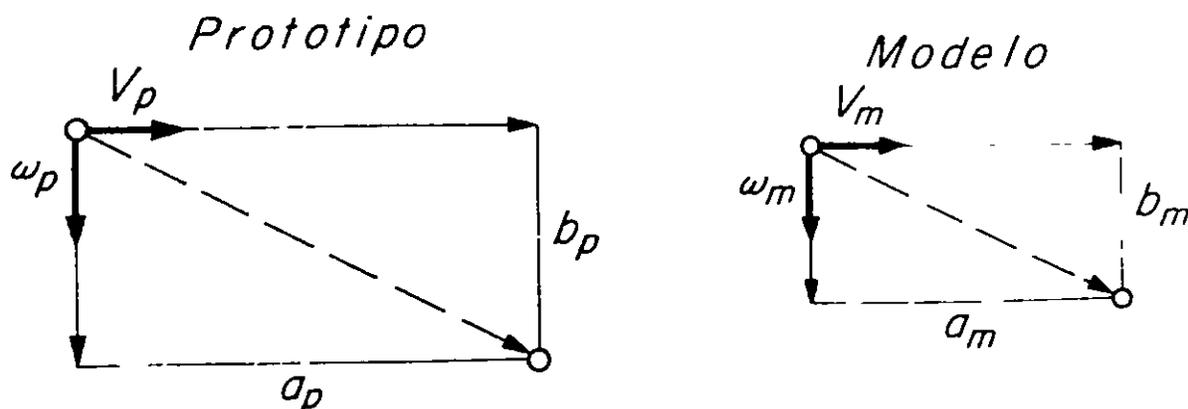
Al aumentar la pendiente se exige que la rugosidad se incremente; pero es necesario recordar la imposibilidad de controlarla. Por las razones expuestas, las distorsiones aceptadas en este tipo de modelos generalmente son bajas, entre dos y siete, y hasta diez en casos muy especiales.

Dentro de la hidráulica fluvial existen muchas teorías y métodos para describir un mismo fenómeno. Así, por ejemplo, para valuar el gasto sólido arrastrado por una corriente se dispone de los métodos de Meyer Peter y Müller³, Kalinske⁴, Eguiazarov⁵, Goncharov⁶, Frijlink⁷, Einstein⁸, Cruickshank⁹, Garde y Albertson¹⁰ entre otros muchos. Al valuar el arrastre en un mismo problema, se obtendrá un resultado diferente con cada método. Por lo anterior, no es raro entonces encontrar diferentes métodos propuestos por muy diversos autores, con los que obtener las relaciones de escala que se deben de cumplir en un modelo fluvial de fondo móvil. Todos los métodos que se han propuesto, para encontrar las relaciones entre las escalas de los modelos fluviales de fondo móvil, se pueden agrupar dentro de uno de los tres grandes grupos siguientes:

- 1.- Aquellos métodos que toman en cuenta el comportamiento individual de una partícula del fondo, por ejemplo, el método de la velocidad de caída, o el del inicio de movimiento.
- 2.- Aquellos que toman en cuenta el comportamiento del conjunto de las partículas del fondo, como el método de Einstein y Chien, o el basado en la gráfica de Shields.
- 3.- Aquellos que toman en cuenta al cauce del río en conjunto, su evolución y características actuales, por ejemplo, el método de Altunin o el de Blench.

3.1 Método de la velocidad de caída

En este método se estudia el comportamiento de una sola partícula, la cual cae dentro de la masa del líquido. La base del método consiste en relacionar los triángulos de los recorridos de una partícula al caer y ser arrastrada por la corriente. Al multiplicar las velocidades del modelo por sus respectivas escalas, los dos triángulos de modelo y prototipo son semejantes.



ω y V son las velocidades de caída y de corriente, respectivamente. Los subíndices "p" y "m" indican valores del prototipo y modelo.

Los triángulos A B C deben ser semejantes en modelo y prototipo cuando las velocidades del modelo se multiplican por sus respectivas escalas.

En el prototipo y en el instante Δt

$$AB = V_p \Delta t = a_p$$

$$BC = \omega_p \Delta t = b_p$$

Dividiendo miembro a miembro

$$\frac{a_p}{b_p} = \frac{V_p}{\omega_p} \quad ; \quad a_p = \frac{b_p V_p}{\omega_p} \quad (22)$$

En forma análoga para el modelo

$$a_m = \frac{b_m V_m}{\omega_m} \quad (23)$$

3.1.1 Modelos no distorsionados

Las ecs 22 y 23 son generales; si ahora se divide la ec 22 entre la ec 23 y se toma en cuenta que $\frac{a_p}{a_m} = \frac{b_p}{b_m} = L_e$ se llega a

$$\frac{a_p}{a_m} = \frac{b_p V_p \omega_m}{b_m V_m \omega_p}$$

$$L_e = \frac{L_e V_e}{\omega_e}$$

$$\omega_e = V_e \quad (24)$$

Por ser el escurrimiento a cielo abierto, deberá cumplirse la condición de Froude

$$V_e = L_e^{1/2}$$

$$\therefore \omega_e = L_e^{1/2} \quad (25)$$

Recuérdese que

$$\omega^2 = \frac{4}{3} \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma} \frac{gD}{C_D} \quad (26)$$

El coeficiente C_D de la última expresión se puede encontrar en la fig 3 para partículas esféricas de cuarzo. Si no se desea usar la ec 26, se puede obtener directamente la velocidad de caída de una partícula en función de su diámetro (fig 4) siempre y cuando $\gamma_s = 2650 \text{ kg/m}^3$.

La ec 25 indica que la velocidad de caída de las partículas en el modelo será $L_e^{1/2}$ veces menor. Esto se logra con una densidad menor de los granos, o bien, con un diámetro más pequeño.

Si el número de Reynolds R_e de la partícula $R = \frac{\omega D}{\nu}$ es menor de 0.1 se pueden conseguir algunas simplificaciones inmediatas, ya que el coeficiente de empuje de la ec 26 toma el valor

$$C_D = \frac{24}{R_e} = \frac{24\nu}{\omega D}$$

Se llega así a la fórmula de Stokes

$$\omega = \frac{1}{18} \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma} \frac{gD^2}{\nu} \quad (27)$$

A continuación se analizan las expresiones anteriores, para algunos casos particulares.

Si los diámetros son menores pero se tiene igual densidad; tomando en cuenta las ecs 25 y 27 se llega a:

$$\frac{1}{18} \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma} \frac{gD_m^2}{\nu} = \frac{1}{18} \frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma} \frac{gD_p^2}{\nu L_e^{1/2}}$$

Al simplificar se obtiene $D_m^2 = D_p^2 / L_e^{1/2}$

Los diámetros en el modelo estarán dados por

$$D_m = \frac{D_p}{L_e^{1/4}}$$

Si ahora los diámetros son los mismos y lo que varía es el peso específico de las partículas sólidas en el modelo, se llega, a partir de las mismas ecuaciones, a

$$\frac{(\gamma_s - \gamma)_m}{\gamma_m} = \frac{1}{L_e^{1/2}} \frac{(\gamma_s - \gamma)_p}{\gamma_p}$$

La escala de densidades es

$$(\gamma_s - \gamma)_e = L_e^{1/2} \quad (28)$$

o bien

$$\gamma_{s_m} = \frac{(\gamma_s - \gamma)_p}{L_e^{1/2}} + \gamma \quad (29)$$

Si en el prototipo se trata de arena

$$\gamma_{s_m} = 1000 + \frac{1650}{L_e^{1/2}}$$

Nótese que puede existir cualquier combinación intermedia.

Aquí solo se han presentado dos casos extremos: igual diámetro o igual peso específico de las partículas sólidas. Con lo que se ha indicado, se conocen dos condiciones extremas si se trabaja con modelos no distorsionados.

Si el número de Reynolds de la partícula al caer es mayor de 0.1, se podrá trabajar con la ec 25 y la fig 3 que da el valor de C_D , o bien con la fig 4 que da directamente la velocidad de caída de las partículas en función de su diámetro.

Como se puede observar, este método permite, para modelos no distorsionados, utilizar el mismo material en el modelo y prototipo y escoger dos escalas independientemente, por lo cual se tienen dos grados de libertad. Se utiliza con ventaja en modelos para estudios de erosión local.

3.1.2 Modelos distorsionados

Si el modelo es distorsionado se divide la ec 22 entre la ec 23 y se obtiene

$$\frac{a_p}{a_m} = \frac{b_p V_p \omega_m}{b_m V_m \omega_p}$$

$$\omega_e = \frac{H_e^{3/2}}{L_e} \quad (30)$$

Las restantes escalas Q_e , A_e , n_e , S_e y t_e etc., son conocidas y tienen el mismo valor que para modelos de fondo fijo en escurrimientos libres.

$$Q_e = H_e^{3/2} L_e$$

$$A_e = H_e L_e$$

$$n_e = r_e^{2/3} L_e^{-1/2}$$

$$S_e = \frac{1}{\Delta}$$

$$t_e = L_e H_e^{-1/2}$$

Conocida la escala ω_e se escoge el material adecuado.

Para modelos distorsionados y si el número de Reynolds de la partícula al caer es menor de 0.1, se procede de manera análoga a la indicada en el inciso anterior.

a) Supóngase que se desea utilizar un material del mismo peso específico que el del prototipo. A partir de la fórmula de Stokes se llega a (ver ecs 27 y 30).

$$\omega_e = \frac{H_e^{3/2}}{L_e} = \frac{D_p^2}{D_m^2} \quad (31)$$

$$D_m = D_p \frac{L_e^{1/2}}{H_e^{3/4}} \quad (32)$$

Si además se quisiera que el diámetro fuera el mismo en el modelo y en el prototipo, se tendría el mismo material en las dos, y se cumplirá que la escala de líneas verticales es

$$\begin{aligned} H_e^{3/4} &= L_e^{1/2} & H_e &= L_e^{2/3} \\ H_e &= L_e^{2/3} & & \end{aligned} \quad (33)$$

por lo que el modelo tendrá una distorsión $\Delta = L_e^{0.333}$

$$\text{Por otra parte tomese la ec 32} \quad D_m = D_p \frac{\Delta^{1/2}}{H_e^{1/4}}$$

Si la distorsión es pequeña, la relación $\Delta^{1/2}/H^{1/4}$ es, en general, un número menor que uno; por lo que los diámetros serán menores en el modelo. Cuando la distorsión es muy grande, el material es mayor en el modelo, a pesar de tener la misma densidad.

b) Si en cambio, se desea utilizar el mismo diámetro en modelo y prototipo, pero de diferente densidad, de la fórmula de Stokes se obtiene

$$\frac{(\gamma_s - \gamma)_p}{\gamma_p} = \frac{\gamma_m}{(\gamma_s - \gamma)_m} \frac{H_e^{3/4}}{L_e}$$

$$\gamma_p = \gamma_m \quad \text{si se usa el mismo líquido}$$

$$(\gamma_s - \gamma)_m = (\gamma_s - \gamma)_p \frac{L_e}{H_e^{3/2}} \quad (34)$$

$$\gamma_{sm} = \frac{(\gamma_s - \gamma)_p}{H_e^{1/2}} + \gamma_m \quad (35)$$

De lo anterior se concluye que esta teoría permite construir modelos con distorsión o sin ella, utilizar el mismo material u otro de diferente densidad y, por último, que los granos en el modelo sean de un diámetro menor o mayor

a los del prototipo.

Al ser el modelo distorsionado se pueden escoger tres escalas independientemente, por lo que el método permite tres grados de libertad.

En la fig 5 se muestra un resumen de los valores de las escalas para este método y los restantes.

Con el método de la velocidad de caída no es posible determinar teóricamente el gasto sólido en el modelo, que es con él que hay que alimentarlo. Para lograrlo se realiza una calibración previa a las pruebas definitivas, lo cual es común a todos los métodos y se presentará al final de este trabajo.

3.1.3 Construcción del modelo

De observaciones en el prototipo se conoce la curva granulométrica del material del fondo. La curva granulométrica se divide en varias porciones, en cinco por ejemplo, y a cada una de ellas corresponde el 20 por ciento del peso de la muestra total. Por supuesto, esas porciones pueden tener cualquier valor y no ser iguales entre sí.

A cada una de esas porciones le corresponde un diámetro medio D_i , al cual corresponde una velocidad de caída ω_i .

La velocidad de caída ω_i se puede obtener utilizando un cilindro transparente, lleno de agua, en donde se dejan caer las partículas y se mide el tiempo que tardan en recorrer una cierta distancia comprendida entre dos marcas.

Si se consideran a las partículas como esféricas, se emplea la fórmula de Stokes, o la fig 3 y la ec 25, o bien, directamente la fig 4. Conocidas las ω_{ip} del prototipo, se dividen cada una entre ω_e y se obtienen las velocidades de caída ω_{im} para el modelo.

A continuación se procede a la inversa. Se hace uso de las gráficas o de la fórmula de Stokes y se determina el diámetro de las partículas para cada velocidad de caída, suponiendo que el modelo será construido con un material de densidad ya conocida.

Una vez calculados los diámetros D_{1m} , se efectúa un cribado y se separan los volúmenes necesarios de cada uno de ellos, de tal manera que al mezclarlos se obtenga la curva granulométrica calculada para el modelo. Si los diámetros del modelo son mayores de 1 cm y $\gamma_s = 2.65$, la curva granulométrica obtenida es paralela a la del prototipo, pero desplazada en la dirección de eje de los diámetros.

Es necesario evitar que los diámetros obtenidos para el modelo no sean demasiado finos, por ejemplo limos o arcillas, cuyo comportamiento difiere del de las arenas. Si eso ocurre, habrá necesidad de utilizar materiales menos densos en el modelo, que permitirán usar diámetros mayores. Por último se coloca el material en el modelo de acuerdo a la topografía.

3.2 Método de la curva de Shields

Este método está basado en la curva de Shields (fig 6), en la cual aparecen los dos parámetros adimensionales siguientes ^{11, 12}:

El primero es

$$F_s = \frac{\tau_o}{(\gamma_s - \gamma)D} \quad (36)$$

el cual es similar a la relación ψ^{-1} de Einstein ⁸

$$\frac{1}{\psi} = \frac{\gamma r_b^3 S}{(\gamma_s - \gamma)D} \quad (37)$$

o el mismo parámetro que aparece en la fórmula de Orlov ⁶:

$$\beta = 0.72 \left(\frac{(\gamma_s - \gamma) D}{\gamma H S} \right)^{0.1} \quad (38)$$

en otra forma

$$\beta = \frac{0.72}{F_s^{0.1}}$$

en donde

- D diámetro de la partícula considerada
- H tirante medio
- F_s parámetro adimensional
- β exponente variable que interviene en la fórmula de Glushkov, la cual relaciona las características geométricas de un cauce natural estable.
- r'_b radio hidráulico asociado a la rugosidad de los granos
- γ peso volumétrico del líquido
- τ_0 esfuerzo cortante producido por la corriente que inicia el arrastre o movimiento de las partículas
- γ_s peso volumétrico de las partículas del material sólido

El segundo parámetro es

$$R^* = \frac{V^* D}{\nu} = \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\rho}} \frac{D}{\nu} = \frac{\sqrt{grS} D}{\nu} \quad (39)$$

donde

R^* número de Reynolds referido al diámetro de las partículas y a la velocidad al esfuerzo cortante cerca del fondo.

Se ha supuesto que el estado de movimiento del fondo y la

forma de las ondulaciones están definidas por la colocación del punto en el plano $F_s - R^*$. Mientras la hipótesis anterior no sea refutada, el método sirve para el diseño de modelos hidráulicos. Por lo tanto, la base del método es hacer F_s y R^* iguales en el modelo y el prototipo; sin embargo, se ha comprobado que el punto del modelo en la curva de Shields no necesita corresponder exactamente con el del prototipo, sino caer en la zona que produzca igual tipo de ondulación en el fondo. Así, si el punto del prototipo cae en la zona donde hay dunas, es suficiente para obtener resultados aceptables, que el punto del modelo esté dentro de la zona de dunas en la gráfica de Shields.

Puesto que el estado del fondo debe ser el mismo en cada caso, se podrá suponer que la rugosidad equivalente k_s tendrá la misma escala que los diámetros de las partículas. Por lo tanto, la escala de resistencia de los granos será la misma que la escala de resistencia de las ondulaciones. De lo anterior se concluye que

$$r_e' = r_e''$$

$$n_{be}' = n_{be}'' = n_{be}$$

En las expresiones anteriores:

n_b' es la rugosidad total del fondo tomando en cuenta las ondulaciones y el tamaño de los granos.

El valor de n_b se obtiene a partir de las condiciones hidráulicas del tramo en estudio. Obtenidos los parámetros; velocidad media de la corriente, pendiente hidráulica y perímetro mojado de una sección media del tramo considerado, se sustituyen en la expresión de Manning de donde se despeja a n_b

$$n_b = \frac{r_b^{2/3} S^{1/2}}{V}$$

n'_b es la rugosidad producida únicamente por las partículas del fondo. Su valor se obtiene mediante la expresión

$$n'_b = \frac{D_{90}^{1/6}}{26} \quad D, \text{ en m} \quad (40)$$

n''_b es la rugosidad producida por las ondulaciones y su valor puede ser obtenido en función de n_b y n'_b mediante la expresión

$$n''_b^{3/2} = n_b^{3/2} - n'^{3/2}_b$$

r_b es el radio hidráulico asociado a la rugosidad total producida por el fondo.

r'_b es el radio hidráulico asociado a la rugosidad producida únicamente por las partículas del fondo, de tal manera que se cumple

$$V = \frac{r_b'^{2/3} S^{1/2}}{n'_b}$$

r''_b es el radio hidráulico asociado a la rugosidad producida solo por las ondulaciones.

Se cumple así que

$$V = \frac{r_b''^{2/3} S^{1/2}}{n'_b}$$

Los distintos radios hidráulicos están relacionados entre sí mediante

$$r_b = r'_b + r''_b$$

Resumiendo lo ya dicho: r_b es el radio hidráulico medido en el tramo en estudio, r'_b y r''_b son obtenidos de la fórmula de Manning después

de conocer el valor correspondiente de la rugosidad asociada y tomando en cuenta que la velocidad media y la pendiente son constantes para cada zona en estudio.

3.2.1 Relaciones entre escalas

Se considerará que el modelo es distorsionado para así resolver el problema más general. De la fórmula de Manning la relación de escala de rugosidades es igual a

$$\begin{aligned} V_e &= \frac{1}{n_e} r_e^{2/3} S^{1/2} \\ H_e^{1/2} &= \frac{r_e^{2/3} H_e^{1/2}}{n_e L_e^{1/2}} \\ n_e &= \frac{r_e^{2/3}}{L_e^{1/2}} \end{aligned} \quad (41)$$

De las ecs 40 y 41 se obtiene

$$D_e^{1/6} = \frac{r_e^{2/3}}{L_e^{1/2}} \quad (42)$$

Por otro lado, de la ec 36 se obtiene la siguiente relación

$$\begin{aligned} F &= 1 & \frac{\tau_e}{(\gamma_s - \gamma)_e D_e} &= 1 \\ \frac{\gamma_e r_e S_e}{(\gamma_s - \gamma)_e D_e} &= 1 & \text{en que} & \left(\frac{\gamma_s - \gamma}{\gamma} \right)_e = \alpha_e \end{aligned}$$

por lo tanto, se llega a

$$\frac{r_e H_e}{D_e \alpha_e L_e} = 1 \quad (43)$$

Por último, de la ec 39 se debe de cumplir que $R_e^* = 1$

Efectuando operaciones y suponiendo $\gamma_e = 1$ se llega a

$$\frac{r_e H_e D_e^2}{L_e} = 1 \quad (44)$$

Las ecuaciones básicas en este método son las 42 a 44.

A continuación se harán algunas observaciones que resultarán de interés.

Puesto que r_e depende de L_e y H_e , en otras palabras $r_e = f(H_e, L_e)$, se tiene con las ecs 42, 43 y 44 un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas: L_e , H_e , D_e , α_e

Si la sección de un río es ancha, de tal manera que el radio hidráulico sea igual al tirante, se cumplirá que $r_e = H_e$. Si por el contrario la sección es estrecha, será necesario calcular el radio hidráulico para la sección del prototipo y lo mismo se hará para la sección ya reducida del modelo. Al dividir r_D entre r_m se obtiene r_e . Por lo tanto, se puede escoger solo una escala en forma independiente, y se tiene así un grado de libertad.

El método aquí propuesto exige que el modelo sea distorsionado, ya que si $L_e = H_e$, se obtiene

de la ec 42
$$D_e^{1/6} = L_e^{1/6} \quad L_e = D_e$$

de la ec 43
$$\frac{L_e^2}{\alpha_e L_e D_e} = 1 \quad L_e = \alpha_e D_e$$

de la ec 44
$$\frac{L_e^2 D_e^2}{L_e} = 1 \quad L_e = D_e^{-2}$$

Las ecuaciones anteriores se satisfacen únicamente si todas las escalas son iguales a uno; es decir, si el modelo es igual al prototipo. Por lo anterior, el modelo debe ser distorsionado.

Supóngase que se elige como escala independiente a α_e , lo cual ocurre cuando se carece de gran variedad de materiales para escoger la densidad requerida.

De la ec 43

$$\frac{H_e r_e}{L_e} = \alpha_e D_e$$

Sustituyendo este valor en la ec 44 se obtiene

$$\alpha_e D_e = \frac{1}{D_e^2}$$

$$D_e = \alpha_e^{-1/3}, \quad D_e = \left(\frac{1}{\alpha_e}\right)^{1/3}$$

La última ecuación indica que si el material del modelo es más ligero que el del prototipo; es decir si α_e es mayor que uno, el diámetro del material en el modelo será mayor.

Hasta aquí no se ha excluido la posibilidad de escoger densidades iguales en el modelo y prototipo. A continuación se estudiará si es factible.

Si el río en estudio no es muy ancho, de tal manera que no se pueda suponer que $r_e = H_e$, entonces, el valor de H_e y L_e deben ser calculados por tanteos usando la geometría de la sección transversal en la forma indicada anteriormente, pero si el ancho del río es tal que se pueda aceptar la relación $r_e = H_e$, conocida α_e se puede concluir lo siguiente:

De la ec 42, y puesto que $D_e = \alpha^{-1/3}$

$$\left(\frac{1}{\alpha_e^{1/3}}\right)^{1/6} = \frac{H_e^{2/3}}{L_e^{1/2}}$$

$$H_e^2 = (\alpha_e^{-1/18} L_e^{1/2})^3 = \alpha_e^{-1/6} L_e^{3/2} \quad (45)$$

De la ec 43

$$H_e^2 = D_e^{-3} D_e L_e$$

$$H_e^2 = L_e D_e^{-2}$$

$$H_e^2 = L_e \alpha_e^{2/3} \quad (46)$$

Igualando los dos valores de H_e de las ecs 45 y 46 se llega a:

$$L_e^{1/2} = \alpha_e^{5/6}$$

$$L_e = \alpha_e^{5/3} \quad (47)$$

Sustituyendo este valor en la ec 46

$$H_e^2 = \alpha_e^{2/3} \alpha_e^{5/3}$$

$$H_e = \alpha_e^{7/6} \quad (48)$$

y de las ecs 47 y 48 se obtiene que la distorsión es igual a

$$\Delta = L_e / H_e = \alpha_e^{5/3} / \alpha_e^{7/6}$$

$$\Delta = \alpha_e^{1/2}$$

Así mismo se deduce que no es posible utilizar material de igual densidad en los dos sistemas, puesto que si $\alpha_e = 1$

$$H_e = L_e = D_e = 1$$

Las últimas expresiones indican que la densidad de los materiales en el modelo debe ser menor que la del material del prototipo, para no tener valores de H_e y L_e cercanos a uno que exigirían modelos de dimensiones muy grandes.

Por último, si se despeja el valor de α_e de la ec 47 y sustituyen en la ec 48, se obtiene

$$H_e = L_e^{21/30} = L_e^{0.7}$$

valor aproximado al $H_e = L_e^{0.666}$ obtenido con el método de la velocidad de caída.

Resumiendo, el método basado en la gráfica de Shields obliga a construir los modelos con distorsión, no permite utilizar el mismo material en el modelo y prototipo, sino uno menos denso y, por último, sólo permite un grado de libertad, ya que escogida una escala, las demás quedan en función de ella. En la fig 5 aparecen algunas relaciones entre las escalas, según este método.

3.3 Método de Einstein - Chien

Este método se basa en las ecuaciones propuestas por Einstein para obtener las características hidráulicas de una corriente y el arrastre de sólidos que produce. A continuación se muestra en forma sucinta el método de Einstein - Chien, de manera semejante a como sus autores lo presentaron.

Se sabe que cuando existe más de un valor de una escala para definir magnitudes semejantes, existe distorsión. Así, si la escala de longitudes horizontales L_e es independiente de la de longitudes verticales H_e , el modelo es distorsionado verticalmente.

Si la escala del tamaño de granos D_e es diferente de L_e y H_e , se introduce una tercera escala de longitudes, y con esto una segunda distorsión.

Si la escala de pendientes se escoge independiente del valor H_e/L_e , se tendrá otra distorsión.

Si la relación de densidades efectivas del sedimento

$(\rho_s - \rho)_e$ es diferente de la escala de densidad del fluido ρ_e , la cual es igual a uno, habrá una cuarta distorsión.

Una quinta distorsión se introduce si la relación tiempo hidráulico t_{1e} , para valores de tiempo involucrados en la determinación de velocidades y cantidades de sedimento, es diferente de la escala de tiempo de sedimentación t_{2e} .

Una sexta distorsión se produce ante la imposibilidad de obtener cantidades de arrastre en suspensión en un modelo, en la misma escala en que las cantidades de arrastre de fondo son reproducidas; esto es, que la escala de arrastre de fondo q_{Be} es diferente de la escala de la cantidad de arrastre total q_{Te} . Eso se ve claramente puesto que en la naturaleza se tiene arrastre de fondo y en suspensión, y en el modelo generalmente nada más se produce arrastre de fondo.

Una séptima y última distorsión permite a la escala de velocidades de sedimentación ω_e , correspondiente a los granos, ser diferente de la escala correspondiente a las velocidades de flujo.

Según Einstein - Chien son nueve las relaciones que se deben cumplir entre las diferentes escalas

a) La primera se obtiene a partir de la ecuación de Manning generalizada

$$V = \frac{C\sqrt{g}}{D^m} S^{1/2} H^{1/2 + m} \quad (49)$$

en la que

V velocidad del flujo

C constante

g aceleración de la gravedad

H tirante medio, equivalente al radio hidráulico

m exponente

La ec 49 resulta idéntica a la ecuación de Manning cuando $m = 1/6$, y se usa la relación $n \sim D^{1/6}$ (ec 40), en donde, n es el coeficiente de rugosidad. Si se considera que el exponente m es el mismo en el modelo y el prototipo, al menos para el rango de gastos más importantes, la ecuación entre escalas es

$$V_e^2 S_e^{-1} H_e^{-1-2m} D_e^{2m} C_e^{-2} = \Delta_v \quad (50)$$

El valor de Δ_v es igual a uno si la similitud entre prototipo y modelo está completamente satisfecha; si no lo es, indica una pequeña desviación de la similitud exacta, si tal desviación es necesaria por cualquier razón práctica. m y C_e son el exponente y la escala de constantes, respectivamente, en la ec 49, la cual puede expresarse también como

$$\frac{V}{\sqrt{r_T S g}} = C \left[\frac{r_T}{k_s} \right]^m \quad (51)$$

en donde

r_T radio hidráulico de la sección total considerando al ancho del fondo como el perímetro, mojado

k_s representa el tamaño del grano del fondo, el cual es representativo de su rugosidad granular si toma el valor de D_{65} .

Si se considera que la mezcla de granos en el modelo es igual a la del prototipo, la escala de valores de k_s será la misma que la de los tamaños de los granos, D_e . Los valores de C se determinarán, por separado, para modelo y prototipo, y la escala se encontrará para una sección promedio, representativa del cauce. El radio hidráulico r_T se define como

$$r_T = \frac{A_T}{P_b} = \frac{A'_b + A''_b + A_w}{P_b} = \frac{r'_b P_b + r''_b P_b + r_w P_w}{P_b}$$

en donde

A_T área de la sección transversal

P_b perímetro mojado del fondo

A'_b área de la sección transversal relacionada con los granos

A''_b área de la sección transversal relacionada con las ondulaciones

A_w parte de la sección transversal relacionada a los bancos

r'_b y r''_b fueron definidos en el método de Shields

r_w radio hidráulico relacionado a los bancos o las orillas

Los valores de C y m para el modelo, solo pueden determinarse por tanteos, ya que dependen de la elección de las relaciones de escala restantes.

b) Criterio de Froude

Aunque en los ríos la pendiente de la superficie del agua sea pequeña, hay que recordar que la gravedad es la que mantiene al flujo.

De la ecuación de Froude $\frac{V}{\sqrt{gH}}$ se deriva la relación de escalas

$$V_e H_e^{-1/2} = \Delta F \quad (52)$$

Cuando la similitud sea exacta, $\Delta F = 1$; cualquier otro valor significará una posible desviación necesaria.

Condiciones de arrastre

El método de Einstein para valuar el arrastre de sedimentos se basa en relacionar una función ϕ_* , denominada intensidad de transporte, con otra ψ_* llamada intensidad de cortante. Los valores de estas funciones son

$$\phi_* = \frac{i_B}{i_b} \frac{q_B}{g(\rho_s - \rho)} \left(\frac{\rho}{\rho_s - \rho} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{D^3} \right)^{1/2} \quad (53)$$

$$\psi_* = \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \frac{D}{r_b S} \xi Y \left(\frac{\log 10.6}{\log 10.6 \frac{x}{\Delta}} \right)^2 \quad (54)$$

donde

i_B peso de partículas de diámetro D_l dentro del conjunto arrastrado, en porcentaje

i_b peso de partículas de diámetro D_l dentro de la mezcla del fondo, en porcentaje

D diámetro medio de una fracción de la curva granulométrica

r_T radio hidráulico total, asociado a las partículas del fondo y las ondulaciones

Y factor de corrección en la transición entre pared lisa y rugosa. Su valor se encuentra en la fig 8, en función de k_s/δ

ξ factor de encubrimiento de los granos de la mezcla, ya que los de mayor diámetro resguardan a los de menor diámetro. Su valor se encuentra en la fig 9, en función de D/X

Δ es igual a k_s/x , donde k_s es el D_{65} de la mezcla

$$\delta \text{ espesor de la capa límite} = \frac{11.6 \nu}{\sqrt{g r_b' S}}$$

X distancia cuyo valor es

$$X = 0.77 \Delta \quad \text{si} \quad \Delta / \delta > 1.80$$

$$X = 1.39 \delta \quad \text{si} \quad \Delta / \delta < 1.80$$

x función de k_s / δ . Se encuentra en la fig 10

ρ_s masa específica de los granos

ρ masa específica del agua

S pendiente hidráulica

Como puede observarse, el valor de ψ_* se calcula en función de todos los datos hidráulicos de la corriente y de las características del material del fondo. Conocido ψ_* de la fig 7 se obtiene el valor de ϕ_* , de donde se despeja q_B , que es el arrastre de material sólido de diámetro D_1 , dado en peso. q_B es la única incógnita de la ec 53. Las figs 7 a 10 no son necesarias para calcular las escalas de un modelo fluvial de fondo móvil pero, como ha sido necesario mencionar todos los parámetros que intervienen en el fenómeno, se han incluido, ya que pueden ser de utilidad si se desea calcular teóricamente el gasto sólido, tanto del modelo como del prototipo.

c) Criterio de la intensidad de transporte

Para lograr condiciones similares de transporte de sedimento cerca del fondo, es necesario que la intensidad del transporte ϕ_* y la intensidad del cortante ψ_* , para los tamaños de granos individuales, sean iguales en el modelo y el prototipo:

Tomando en cuenta la ec 53, la igualdad solo es posible, para todas las fracciones de una mezcla, si las dos mezclas son iguales; es decir, si la escala de los valores de l_b es igual a uno.

Esa condición se logra si las curvas granulométricas son paralelas aunque desplazadas en la dirección del eje de los diámetros. Si ρ es igual en el modelo y en el prototipo, la ecuación de iguales valores de ϕ_* puede ser escrita como

$$q_{Be} (\rho_s - \rho)_e^{-3/2} D_e^{-3/2} = 1 \quad (55)$$

d) Criterio de igual intensidad de cortante (arrastre nulo de sedimento). La igualdad de los valores de ψ_* en el modelo y el prototipo es a menudo interpretada como la condición de similitud de flujo para el principio del movimiento de sedimentos.

$$\psi_* = \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \frac{D}{r_b S} \xi Y \left(\frac{\log 10.6}{\log 10.6 \frac{x}{\Delta}} \right)^2 \quad (54)$$

Analizando el significado de todas las correcciones, se puede inferir que ξ es diferente para los diferentes tamaños de grano de la mezcla. Para los tamaños más grandes, tanto en el modelo como en el prototipo, $\xi = 1$. Por similitud, la escala de los valores de ξ debe ser igual a uno, para todos los tamaños. Como ξ es una función de D/X , D_e debe ser igual a X_e . Y es función de (k/δ) , y recordando que $X = 1.39$ si $\Delta/\delta < 1.8$ y $X = 0.77\Delta$, para $\Delta/\delta > 1.8$, δ es igual a k_s/x y x es una función de k_s/δ . En las relaciones anteriores δ es el espesor de la subcapa laminar y como por definición $(k_s)_e = D_e$, puede verse que, en general, la similitud puede ser posible solo si $\delta_e = D_e$. Con lo anterior $x_e = 1$, $\Delta_e = D_e = \delta_e = X_e$ y, por lo tanto, $Y_e = 1$. Entonces la relación de escalas obtenida de ψ_* se expresa como

$$(\rho_s - \rho)_e D_e \eta_e^{-1} H_e^{-1} S_e^{-1} = 1 \quad (56)$$

donde; η_e es la relación de los radios hidráulicos r_b^i referidos a la superficie de arrastre entre el radio total r_t . Esta corrección se introduce ya que r_{te} es igual a H_e y no así r_{be}^i . Para cauces muy anchos $r_b^i = r_{be}$

e) Criterio de la subcapa laminar

Como se ha demostrado, δ_e debe ser igual a D_e . A partir del valor del espesor de la capa límite que es $11.62 \nu/V^*$

o bien, de $\delta = \frac{11.6 \nu}{\sqrt{g r_b S}}$, se llega a la siguiente relación de escalas

$$D_e \eta_e^{1/2} S_e^{1/2} H_e^{1/2} = \Delta \delta \quad (57)$$

Las desviaciones pequeñas del valor de $\Delta \delta$ con respecto a uno se pueden permitir, especialmente en casos en los cuales las asperezas del fondo sean considerablemente más grandes que δ y, por lo tanto, no se afecte directamente por este valor.

f) Relación entre escalas de gasto sólido

Al calcular algunas características del flujo en el modelo y el prototipo, se determina la relación entre la escala de arrastre total q_{T_e} (es decir, la suma de arrastre de fondo y en suspensión) y la escala de arrastre en el fondo q_{B_e} , en términos del coeficiente B. Este valor puede usarse para obtener la relación general entre las dos escalas de arrastre

$$q_{B_e} q_{T_e}^{-1} B = 1 \quad (58)$$

g) Escala de tiempos hidráulicos

El tiempo hidráulico t_i se define como el tiempo en el cual una partícula de agua recorre una distancia L a una velocidad V

De la ecuación $v = \frac{D}{T}$

se llega a la relación de escalas

$$V_e t_{1e} L_e^{-1} = 1 \quad (59)$$

h) Tiempos de sedimentación

El tiempo t_2 indica la duración para arrastrar un volumen dado de sólidos. La escala de este tiempo corresponderá al intervalo de tiempo en el cual el arrastre de sedimento q_T llena un volumen dado. En el instante t_2 se arrastra un peso de sólidos igual a $t_2 q_T$, cuyo volumen es $\frac{t_2 q_T}{\rho_s - \rho}$. Este volumen ocupará un espacio de ancho unitario igual a $L \times H$, en donde H es una profundidad y L una longitud en la dirección del escurrimiento. Si se igualan los dos volúmenes se obtiene

$$\frac{t_2 q_T}{\rho_s - \rho} = LH \quad (60)$$

y la relación de escalas correspondientes será

$$q_{Te} t_{2e} L_e^{-1} H_e^{-1} (\rho_s - \rho)_e^{-1} = 1 \quad (61)$$

Si se considera que la porosidad de los depósitos son iguales en el modelo y el prototipo, la cantidad de sedimento q_T se puede medir en peso sumergido. t_{2e} es la escala de tiempos en la cual hidrógrafos del prototipo pueden repetirse en el modelo.

i) Escala de pendientes

Por último, se pueden introducir escalas independientes

para la longitud, altura y pendiente, lo que implica que

$$S \neq \frac{H}{L}$$

y así

$$S_e L_e H_e^{-1} = \Delta\eta \quad (62)$$

$\Delta\eta < 1$ indica que el modelo se inclina más de lo que piden sus escalas de líneas.

A continuación se resumen las nueve ecuaciones propues-

tas por Einstein - Chien

$$V_e^2 S_e^{-1} H_e^{-1-2m} D_e^{2m} C_e^{-2} = \Delta v \quad (50) \quad \text{De la ecuación generalizada de Manning}$$

$$V_e H_e^{-1/2} = \Delta F \quad (52) \quad \text{De la condición de Froude}$$

$$q_{B_e} (\rho_s - \rho)_e^{-3/2} D_e^{-3/2} = 1 \quad (55) \quad \text{De } \psi_{*e} = 1$$

$$(\rho_s - \rho)_e D_e \eta_e^{-1} H_e^{-1} S_e^{-1} = 1 \quad (56) \quad \text{De } \phi_{*e} = 1$$

$$D_e \eta_e^{1/2} H_e^{1/2} S_e^{1/2} = \Delta \delta \quad (57) \quad \text{Del valor de la capa límite}$$

$$q_{B_e} q_{T_e}^{-1} B = 1 \quad (58) \quad \text{Relación entre gastos sólidos}$$

$$V_e t_{1e} \bar{L}_e^{-1} = 1 \quad (59) \quad \text{Relación entre tiempos hidráulicos}$$

$$q_{T_e} t_{2e} \bar{L}_e^{-1} H_e^{-1} (\rho_s - \rho)_e^{-1} = 1 \quad (61) \quad \text{Relación entre tiempos de sedimentación}$$

$$S_e L_e H_e^{-1} = \Delta\eta \quad (62) \quad \text{Relación de pendientes}$$

Los valores de m , C y η se determinan con cálculos auxiliares; Δv , ΔF , $\Delta \delta$ y $\Delta \eta$ son iguales a uno, aunque se permiten ligeras desviaciones de ese valor. Si se aceptan para las Δ valores diferentes de uno, es posible seleccionar, arbitrariamente más de una escala. Lo anterior, en ocasiones es necesario por ejemplo cuando el tamaño del modelo esta limitado por el espacio en el laboratorio y la densidad del sedimento por los materiales disponibles. Así se tienen nueve ecuaciones y diez incógnitas, aunque si se considera a B son 11 las incógnitas. Por lo anterior, se escoge una escala en forma independiente, y el valor de B se calcula conocidas q_{B_e} y q_{T_e} . En la Fig 11 se presenta la solución de las nueve ecuaciones escogiendo en forma independiente alguna escala; primero seleccionando la escala vertical H_e , después escogiendo la escala horizontal L_e y finalmente escogiendo la escala de densidades del sedimento $(\rho_s - \rho)_e$.

El procedimiento de cálculo propuesto por Einstein - Chien es

1. Si la ec 51 se transforma en una ecuación logarítmica, se tendrá la ecuación de una recta, la cual se representa en un papel logarítmico $V^2/r_T gS$ contra r_T/k_s . De esta manera se conocen C (ordenada al origen) y m (pendiente de la recta). Con los datos del prototipo se podrá hacer lo anterior, y así se obtendrá el valor correspondiente de C_p y m .

2. En base a la gráfica trazada se lleva una recta paralela, como primer tanteo, para tratar de representar en el modelo las condiciones de fricción. Así se conoce el valor de C_m (m es igual para el modelo y el prototipo).

3. Conocidos C_p y C_m , se calcula C_e
 4. A continuación se escoge una escala, por ejemplo L_e . Los valores de Δ y de η_e se pueden considerar iguales a uno en un primer tanteo.
 5. En seguida se determinan H_e , S_e , D_e , V_e y $(\rho_s - \rho)_e$, de las ecs 50, 52, 56, 57 y 62.
 6. Con los datos anteriores se obtienen S_m , ρ_{S_m} , D_{35_m} , k_{sm} y H_m , para el modelo.
 7. Una vez conocidos esos datos, se calcularán para el modelo los valores $V^2/r_T g S$ y r_T/k_s . Estos valores se llevan a la gráfica, y se ve si la recta trazada coincide con la supuesta; si no es así, se obtiene un nuevo valor de C_e y m .
 8. Se repiten los pasos (2) a (7) hasta lograr los valores correctos de C y m . Con esto, se tendrá semejanza con respecto a la fricción entre modelo y prototipo.
 9. Definidas las escalas citadas en el paso 5, se podrá conocer la escala t_{1_e} de la ec 59 y la escala q_{B_e} de la ec 55.
 10. Para determinar las escalas restantes se necesita el valor de B . Con los datos que hasta ahora se conocen, se aplica el método de Einstein, para obtener el arrastre de material sólido en el fondo y en suspensión, en modelo y prototipo, con lo que se obtendrá la escala del arrastre total q_{T_e} . Sustituyendo este valor y el de q_{B_e} en la ec 58, se conoce el valor de B .
 11. De la ec 61 se calcula la escala t_{2_e} .
- Una vez conocidas las escalas es necesario verificarlas

en el modelo. Tal verificación o calibración implica la reproducción de algún fenómeno registrado que se conozca del prototipo. Únicamente si la calibración es posible, el modelo resulta confiable para predecir distintos fenómenos que pudieran ocurrir en el futuro. La práctica indica que la principal dificultad que presentan los estudios basados en modelos es la información tan completa que se necesita del prototipo para construir, calibrar y operar el modelo correspondiente.

Como puede observarse, hasta el paso 6 se han necesitado solo las ecs 50, 52, 56, 57 y 62, con seis incógnitas en total. Las ecuaciones restantes no se requieren para la construcción del modelo y debido a la inexactitud del cálculo del arrastre sólido se puede asegurar que son innecesarias las ecs 55, 58 y 61. La ec 59 permite conocer el valor de la escala de tiempos para las partículas líquidas. Además, la ec 58 nos lleva al conocimiento de un coeficiente B prácticamente inútil.

Si se acepta que $m = 1/6$ y $C_e = 1$, que además $\eta = 1$ y que todos los valores de Δ son iguales a uno también, las ecs 50, 52, 56, 57 y 62 quedan reducidas a

$$V_e^2 S_e^{-1} H_e^{-4/3} D_e^{1/3} = 1 \quad (50')$$

$$V_e H_e^{-1/2} = 1 \quad (52')$$

$$(\rho_s - \rho)_e D_e H_e^{-1} S_e^{-1} = 1 \quad (56')$$

$$D_e H_e^{1/2} S_e^{1/2} = 1 \quad (57')$$

$$S_e L_e H_e^{-1} = 1 \quad (62')$$

Se tienen, como ya se ha mencionado, cinco ecuaciones con seis incógnitas, por lo cual solo es posible escoger una escala en forma independiente.

A continuación se efectuarán algunas operaciones para ver el alcance del método.

Supóngase como escala conocida L_e , que será función del espacio disponible en el laboratorio. Así, la ec 62 se puede escribir como

$$S_e = H_e / L_e$$

Sustituyendo el valor de S_e en la ec 57'

$$D_e = \frac{L_e^{1/2}}{H_e H_e}$$

$$D_e = \frac{L_e^{1/2}}{H_e} \quad (63)$$

De la ec 52' se obtiene que $V_e = H_e^{1/2}$

Al sustituir los valores de V_e y S_e , en la ec 50' se llega a

$$H_e \frac{H_e^{-1}}{L_e^{-1}} H_e^{-4/3} D_e^{-1/3} = 1$$

$$D_e = \frac{H_e^4}{L_e^3} \quad (64)$$

Igualando los valores de D_e se puede despejar H_e en función de L_e

$$\frac{H_e^4}{L_e^3} = \frac{L_e^{1/2}}{H_e}$$

$$H_e = L_e^{7/10} \quad (65)$$

Esta ecuación indica que el modelo deberá ser distorsionado, con una distorsión cuyo valor es

$$\Delta = \frac{L_e}{L_e^{7/10}} = L_e^{3/10}$$

Sustituyendo el valor de H_e dado por la ec 65 en la ec 63 se obtiene el valor de la escala de diámetros

$$D_e = \frac{L_e^{1/2}}{L_e^{7/10}} = L_e^{-1/5} \quad (66)$$

Como L_e es siempre positivo y mayor que uno, el valor de D_e será siempre menor que uno y por lo tanto el material en el modelo deberá tener un tamaño mayor que el del prototipo.

Si ahora se sustituyen las escalas conocidas en la ec 56', se determina el valor de la escala de densidades

$$\begin{aligned} (\rho_s - \rho)_e L_e^{-1/5} L_e^{-7/10} \frac{H_e^{-1}}{L_e^{-1}} &= 1 \\ \frac{(\rho_s - \rho)_e L_e}{L_e^{4/10} H_e} &= 1 \\ (\rho_s - \rho)_e &= \frac{H_e}{L_e^{1/10}} = \frac{L_e^{7/10}}{L_e^{1/10}} = L_e^{3/5} \end{aligned} \quad (67)$$

De esta ecuación es posible deducir que el material en el modelo deberá ser de una densidad menor que el material del prototipo.

Las ecs 63 a 67 se han obtenido al suponer conocida la escala de líneas horizontales. Un análisis similar se puede efectuar al tomar como escalas independientes a la escala de densidades del material sumergido, de diámetros, o a la de líneas verticales.

En las tablas I a III se indican las relaciones entre

las escalas en la forma más general, a partir de una escala conocida. En esas relaciones, también se han hecho intervenir a n , m y a las Δ_s ; parámetros cuyos valores pueden ser distintos a los supuestos en el análisis anterior. Por lo dicho, este método permite un solo grado de libertad, es decir, solo es posible escoger una escala en forma independiente. Según este método no es posible usar en el modelo el mismo material arenoso del prototipo sino uno con una densidad menor y diámetro mayor; además exige que el modelo sea distorsionado. Como se ha demostrado, si η_e y todas las deltas tienen un valor igual a uno, los valores de las escalas son idénticos a los dados por el criterio de Shields.

En el inciso 4 se presenta un método para calibrar el modelo y conocer con mayor exactitud a q_{B_m}

3.4 Métodos que toman en cuenta al cauce en conjunto

Entre los métodos que consideran todas las características del cauce natural se mencionará únicamente al método de Altunin.

3.4.1 Criterio de Altunin

Este método se basa en las siguientes condiciones.

1. Toma en cuenta la fórmula fundamental de

Gluschkov, que considera que el ancho del río está relacionado con el tirante, según la expresión:

$$KH = B^\beta \quad (68)$$

siendo β , según Orlov, igual a

$$\beta = 0.72 \left[\frac{D(\sigma-1)}{HS} \right] \quad (69)$$

En las ecuaciones anteriores

B ancho del río, en m

H tirante medio del río, en m, obtenido al dividir el área de la sección transversal entre el ancho B

D diámetro medio del material del fondo dado por

$$D = \frac{\sum P_i D_i}{100}, \text{ en m}$$

S pendiente hidráulica media

σ densidad del material

K coeficiente que depende de la resistencia de las orillas y el fondo a la erosión. Para cauces estables que corren sobre material aluvial, varía entre 8 y 12. En la mayoría de los problemas de ingeniería se considera el valor promedio de 10 para los primeros cálculos. Para cauces con orillas difícilmente erosionables varía entre 3 y 4 y para cauces fácilmente erosionables alcanza valores de 16 a 20.

La base del método es suponer que β y K son iguales

en modelo y prototipo.

De la ec 68 se obtiene la relación

$$H_e = L_e^{\beta} \quad (70)$$

Esto es posible, como ya se indicó, si β es común a modelo y prototipo. De la ec 69 se observa que β es función de la densidad, pendiente, tirante y del diámetro del material; su valor varía entre 0.5 a 1.0, siendo el más frecuente 2/3 (fig 12).

2. De la ec 69 se obtiene la siguiente relación entre

escalas

$$D_e (\sigma - 1)_e H_e^{-1} S_e^{-1} = 1 \quad (71)$$

3 La tercer condición es satisfacer la ley de Froude, que se expresa

$$V_e = H_e^{1/2}$$

4. Se toma en cuenta la fórmula de Chezy, en la forma

$$V = C \sqrt{HS}$$

que como relación entre escalas se expresa

$$C_e H_e^{1/2} S_e^{1/2} V_e^{-1} = 1$$

Además de las cuatro condiciones se pueden establecer escalas complementarias, por ejemplo

$$S_e = H_e / L_e = t / \Delta$$

$$Q_e = L_e H_e V_e = L_e H_e^{3/2}$$

$$t_e = L_e V_e^{-1} = L_e H_e^{-1/2}$$

De lo anterior se puede decir que se tienen diez escalas y ocho relaciones por satisfacer, o sea que se pueden suponer independientemente dos escalas y deducir las restantes, por lo que este método permite dos grados de libertad. A continuación se harán algunas operaciones a partir de las ecuaciones fundamentales, suponiendo como escalas independientes a L_e y $(\rho_s - \rho)_e$. De la ec 70 se obtiene el valor de la escala de líneas verticales; por lo tanto la distorsión valdrá

$$\Delta = \frac{L_e}{H_e} = \frac{L_e}{L_e^\beta} = L_e^{1-\beta}$$

Si el tramo en estudio corresponde a una zona de montaña, β podrá tener un valor igual a uno y por lo tanto no será necesario distorsionar el modelo. De la ec 71 se obtiene el valor de la escala de diámetros

$$D_e = \frac{H_e S_e}{(\sigma-1)_e} = \frac{L_e^{1-\beta} L_e}{(\sigma-1)_e L_e^\beta}$$

$$D_e = \frac{L_e^{2(1-\beta)}}{(\sigma-1)_e}$$

o bien

$$D_e = \frac{L_e^{2(1-\beta)}}{(\rho_s - \rho)_e}$$

Si la densidad del material es la misma en modelo y prototipo $D_e = L_e^{2(1-\beta)}$ es decir, siempre el material del modelo será más fino. Si además de usar material de igual densidad el tramo en estudio esta en una zona de montaña $D_e = 1$, será necesario usar el mismo material del prototipo, lo cual resulta absurdo en ocasiones. Cuando $\beta = 1$, o sea que se estudia un tramo de río en zona de montaña, el modelo puede ser no distorsionado. Por otra parte, el método impone mayores distorsiones cuanto más haya desarrollado el río la zona deltica y sea esta la zona por estudiar. Por último, este método permite usar material con igual densidad que el del prototipo.

5. CALIBRACION DEL MODELO¹⁴

La calibración o tarado del modelo consiste en reproducir en él lo que ha ocurrido en el río durante el tiempo en que se han hecho obser-

vaciones. Este ajuste puede durar en un modelo grande de 6 a 18 meses. Con el fin de ahorrar tiempo se puede hacer una calibración auxiliar en una mesa de arena cuyas dimensiones son unos 30 m de largo por 3 ó más de ancho. La calibración auxiliar desarrollada en el Instituto de Ingeniería se basa en el mecanismo de funcionamiento de una corriente con tres grados de libertad, como se estableció en la teoría de régimen. Los grados de libertad consisten en lo siguiente ¹⁵:

Si se tiene un canal con paredes y fondo fijos, pendiente de fondo conocida, y se hace pasar por él un gasto líquido Q , este fluirá con un tirante H . Se dice entonces, que esa corriente solo puede variar el tirante H para hacer pasar el gasto dado y que por lo tanto se trataba de un escurrimiento con un grado de libertad, y sus características se definen con una sola ecuación. Si en el canal además del gasto Q se añade un gasto sólido q_s , se tendrá un ajuste en la pendiente y en el tirante para que esos dos gastos pasen en forma continua por todas las secciones. Se dice entonces que se trata de un escurrimiento con dos grados de libertad y se requieren dos ecuaciones para obtener sus condiciones de equilibrio.

Si ahora el canal se hace sobre un material capaz de ser arrastrado, de tal manera que las orillas puedan erosionarse, y se hacen pasar los gastos sólido y líquido mencionados al explicar el segundo grado de libertad, se producirá un ajuste en pendiente, tirante y anchura, con lo que se tiene una corriente con tres grados de libertad, y se requieren tres ecuaciones para definir su equilibrio (fig 13 a b e). Si el último canal se deja en operación durante mucho tiempo se permitirá que las orillas sean erosionadas y se formen meandros. La formación de meandros establece un cuarto grado de libertad y para ello se requiere tiempo.

El procedimiento que se sigue en la calibración auxiliar consiste en formar, en una playa de arena, un canal cuya sección tenga dimensiones aproximadas a las de la sección media del río, según las escalas seleccionadas. Se hace pasar el gasto dominante a escala y se añade una cierta cantidad de material sólido, procurando que la pendiente no varíe. Si la pendiente en las primeras secciones disminuye, significa que la alimentación de material sólido es escasa, y que la corriente que tiene una capacidad de arrastre mayor remueve material de las primeras secciones para arrastrarlo hacia aguas abajo. Si la pendiente aumenta, significa que se está alimentando más material que el necesario. Después de algunos tanteos, disminuyendo o aumentando el gasto sólido alimentado, se puede lograr que la pendiente inicial se conserve durante cien o doscientas horas de ensaye. Al terminar esta prueba se compara el ancho de la sección y el tirante finales con el ancho y tirante del prototipo. Sus respectivas relaciones deben ser iguales a la escala de líneas horizontales y verticales (fig 14)

$$\frac{B_p}{B_m} = L_e$$

$$\frac{H_p}{H_m} = H_e$$

Si esas relaciones no se cumplen, se podrá cambiar el diámetro del material del modelo por otro de diferente densidad o diámetro, o bien cambiar las escalas de líneas, o únicamente cambiar una, variando la distorsión. También se puede introducir una distorsión en el gasto al disminuir el gasto líquido en el modelo. En este caso se tienen dos escalas de gastos, una obtenida de las escalas de líneas igual a $L_e H_e^{3/2}$ y otra que resulta de la relación del gasto en el prototipo

entre el nuevo gasto en el modelo. Cualquiera que sea la solución adoptada, se tendrá que repetir la calibración auxiliar hasta que el ancho y los tirantes obtenidos estén reproducidos con las escalas del modelo.

Como puede notarse, el gasto sólido necesario para el modelo se obtiene de la calibración auxiliar, sin considerar al material que el río arrastra en la naturaleza. Si se desea, es posible calcular el material sólido al iniciarse la calibración auxiliar, lo cual ahorra trabajo y reduce los tanteos; sin embargo eso no es indispensable.

Entre las principales ventajas de la calibración auxiliar propuesta se cuenta que se requieren pocos datos del prototipo para llevarla a cabo y no se requiere conocer el gasto sólido. Además los tiempos totales de calibración se reducen en más del 50 por ciento.

El cuarto grado de libertad, es decir, el desarrollo de meandros, erosiones y depósitos en diferentes secciones que se tengan registradas, se tendrá que intentar reproducir en el modelo definitivo dentro de su calibración completa, pero ya sin el problema de que las secciones tiendan a hacerse más o menos anchas y profundas.

Una vez que se ha calibrado el modelo, se probará la obra proyectada, origen del estudio del modelo, y es de esperarse que su comportamiento sea similar al que se pueda presentar en la naturaleza.

Cuanto mejor haya sido la calibración mayor será la certeza en la respuesta y esto dependerá principalmente de la mayor o menor cantidad de datos disponibles. La obra probada en un modelo fluvial debe ser construida lo antes posible, ya que constantemente cambian las condiciones del cauce en la naturaleza.

BIBLIOGRAFIA

- Daily, S. W. y Harteman, D. R. "Fluid Dynamics", Addison Wesley, Massachusetts (1966)
- Levi E., "Mecánica de los fluidos", Facultad de Ingeniería, UNAM, 1965
- Meyer Peter, y Müller, "Formulae for bed-load transport", Second conference of IAHR. Stockholm, 1964.
- Kalinske, A.A. "Moment of sediment as bed-load in river", Trans. Am. Geophysical Union, Vol. 28. (1947)
- Eguiazarov I.B. "Comparación de los métodos de cálculo del gasto de sedimento con mediciones en la naturaleza" Métodos de estudio y aprovechamiento de los recursos del agua. Academia de Ciencias de la URSS (texto en Ruso) 1964.
- Altunin, S.T., Regulación de cauces. Moscú (texto en ruso) 1962
- Frijlink H. C. "Discussion des formules de débit solide de Kalinske, d'Einstein et de Meyer Peter and Müller", 10 Journées de l'Hydraulique. Grenoble, 1952
- Einstein, H. A. "The bedload function for sediment transportation in open-channel flows", U.S. Dept. Agr. Tech. Bull. 1026, Washington 1950
- Cruickshank, C. "Bed features with uniform flow over a bed of loose sand "Hydraulics Research Station, Internal report No. 36, Wallingford 1964
- Garde, R. J. y Albertson, M. L. "Bed transport in alluvial Channels", La Blanche, mayo-junio 1962
1. Anderson, A. G., "Sedimentation"-Sección 19 del Hand book of Fluid Dynamics de Victor L. Streeter, Mc Graw - Hill (1961)
2. Henderson F. M. "Open channel Flow" Macmillan New York (1967)

13. Einstein, H. A. y Chien, N., "Similarity of distorted river Models with movable bed",
Trans ASCE Vol 121, (1956)
14. Maza, J.A. y Springall, R. "Modelos fluviales de fondo móvil y su calibración No. 190
del Instituto de Ingeniería, septiembre 1968
15. Blench, T. "Regime behaviour of canals and rivers" Butterworth, London, 1957

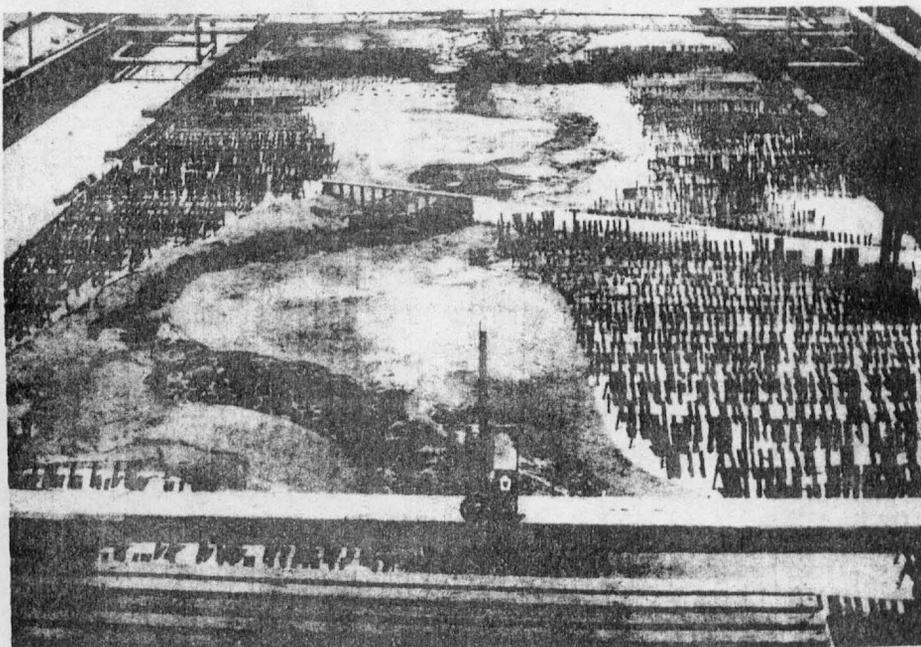


Fig 1 Modelo del río Coahuayana (fondo fijo en el cauce de inundación)



Fig 2 Modelo del río Danubio

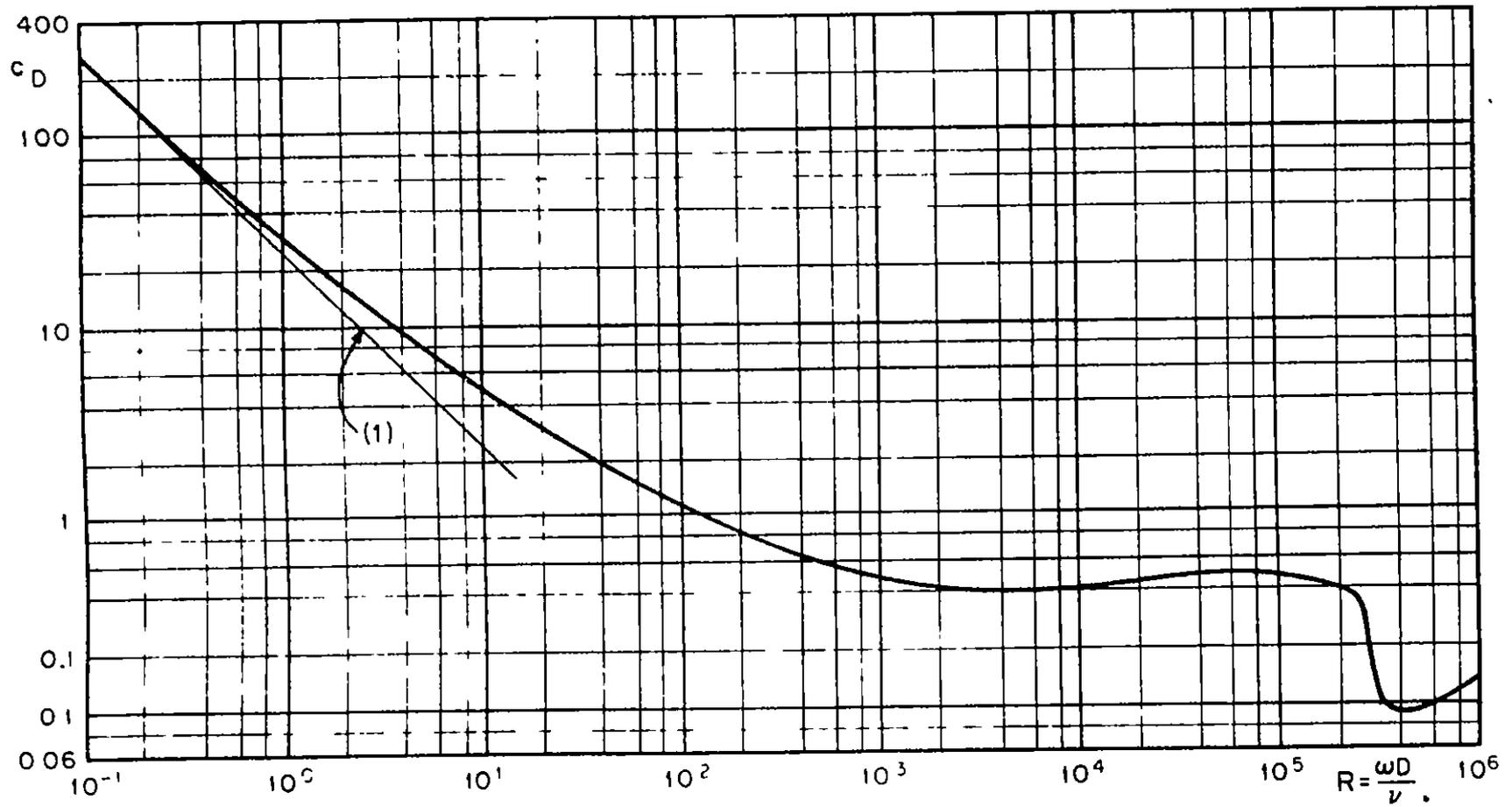


Fig 3 Coeficiente de empuje c_D para esferas.
La ecuación de la recta 1, es $c_D = 24/R_e$

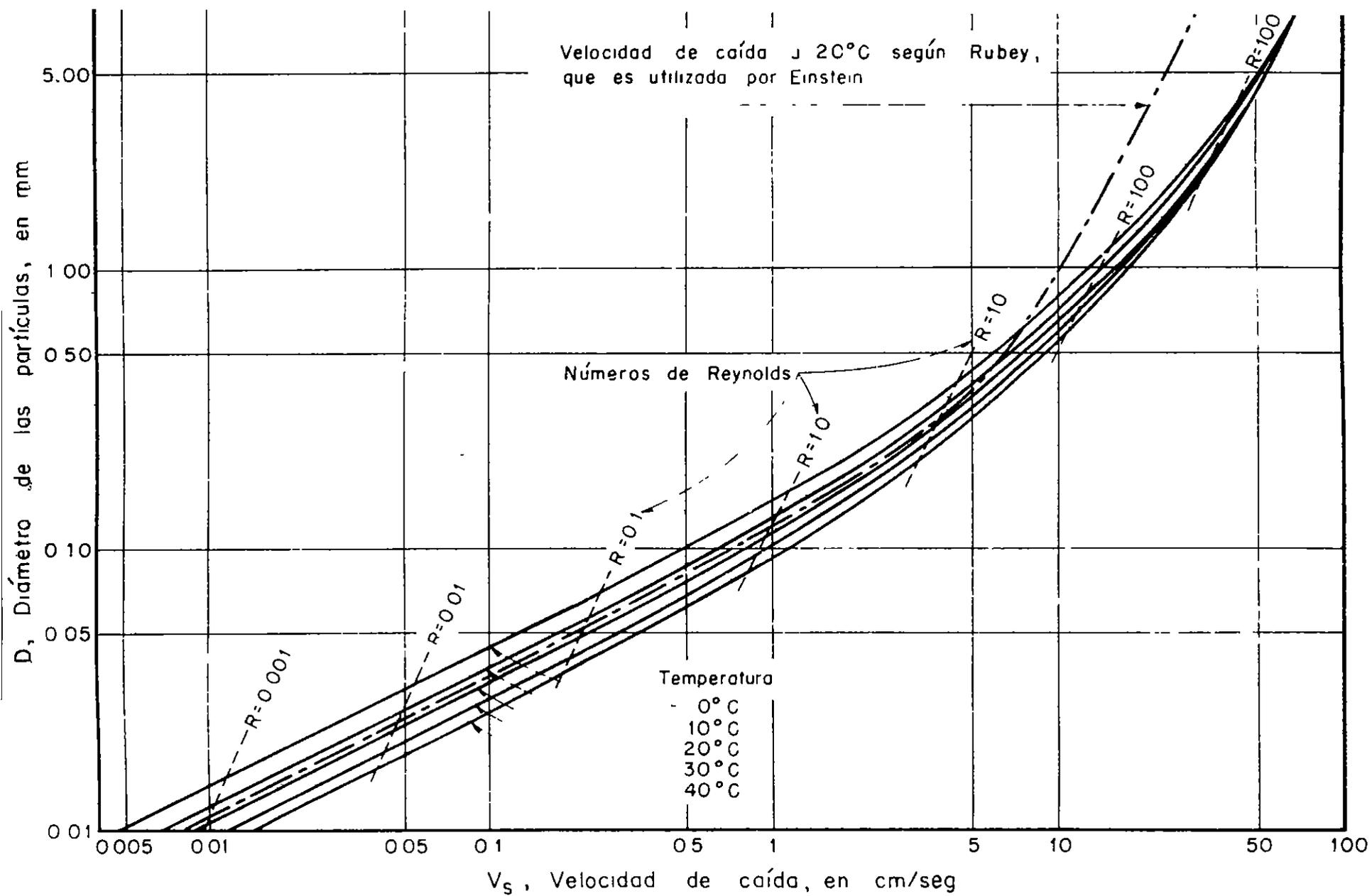


Fig 4 Velocidad de caída de esferas de cuarzo en agua, a diferentes temperaturas

Fig 5 Relación entre los diferentes métodos

Métodos		Escala de líneas verticales He	Escala de líneas horizontales Le	Escala de diámetros (De)		Escala de $(\gamma_s - \gamma)e$		Distorsión	
				Si $(\gamma_s - \gamma)e = 1$	Si $(\gamma_s - \gamma)e \neq 1$	Si De = 1	Si De $\neq 1$		
Velocidad de caída	No distorsionado (2 grados de libertad)	conocida	conocida	$Le^{1/4}$	$\frac{Le^{1/4}}{(\gamma_s - \gamma)^{1/2}}$	$Le^{1/2}$	$\frac{Le^{1/2}}{De}$	1	
	Distorsionado (3 grados de libertad)	Igual mat en modelo y prototipo	Le ^{2/3}	Le	Solo si Re < 1				Le ^{1/3}
					1	—	1	—	
Diferente material y granulometría	conocida	conocida	$\frac{He^{3/4}}{Le^{1/2}}$	$\frac{He^{3/4}}{Le^{1/2}(\gamma_s - \gamma)^{1/2}}$	$\frac{He^{3/2}}{Le}$	$\frac{H^{3/2}}{Le De}$	$\frac{Le}{He}$		
De la curva de Shield (1 grado de libertad)		$(\gamma_s - \gamma)e^{7/6}$	$(\gamma_s - \gamma)e^{5/3}$	—	$(\gamma_s - \gamma)e^{-1/3}$	—	conocida	$(\gamma_s - \gamma)e^{1/2}$	
		$Le^{7/10}$	conocida	—	$Le^{-1/5}$	—	$Le^{3/5}$	$Le^{0.3}$	
Einstein - Chien (1 grado de libertad)		$Le^{7/10}$	conocida	—	$Le^{-1/5}$	—	$Le^{3/5}$	$Le^{0.3}$	
		$(\gamma_s - \gamma)^{7/6}$	$(\gamma_s - \gamma)e^{5/3}$	—	$(\gamma_s - \gamma)e^{-1/3}$	—	conocida	$(\gamma_s - \gamma)e^{1/2}$	
Altunin (2 grados de libertad)		$Le^\alpha (*)$	conocida	—	$\frac{Le^{2\alpha-1}}{(\gamma_s - \gamma)e}$	—	$\frac{Le^{2\alpha+1}}{De}$	$Le^{1-\alpha}$	

(*) α puede valer de 0.5 para ríos de llanura a 1.0 para ríos de montaña

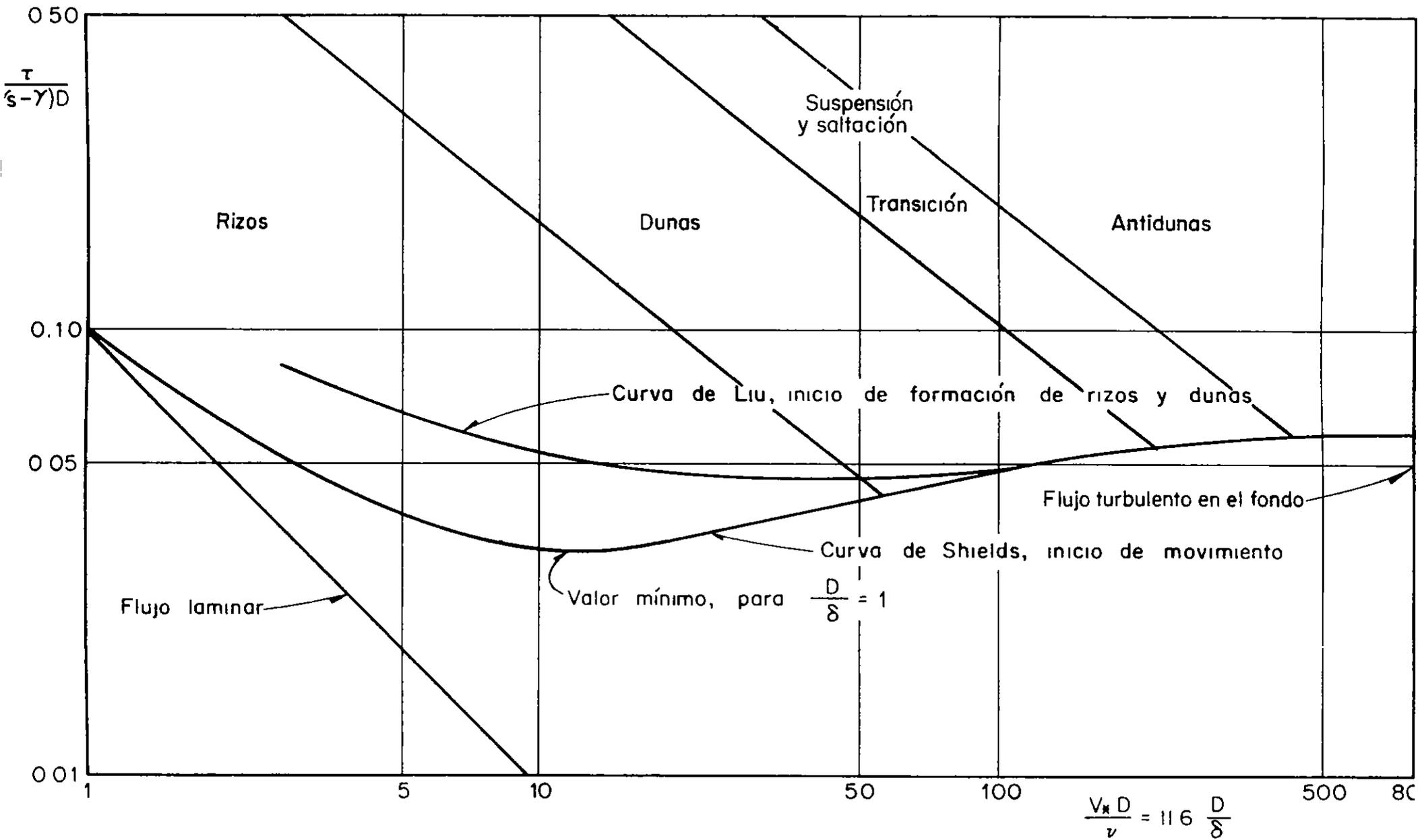
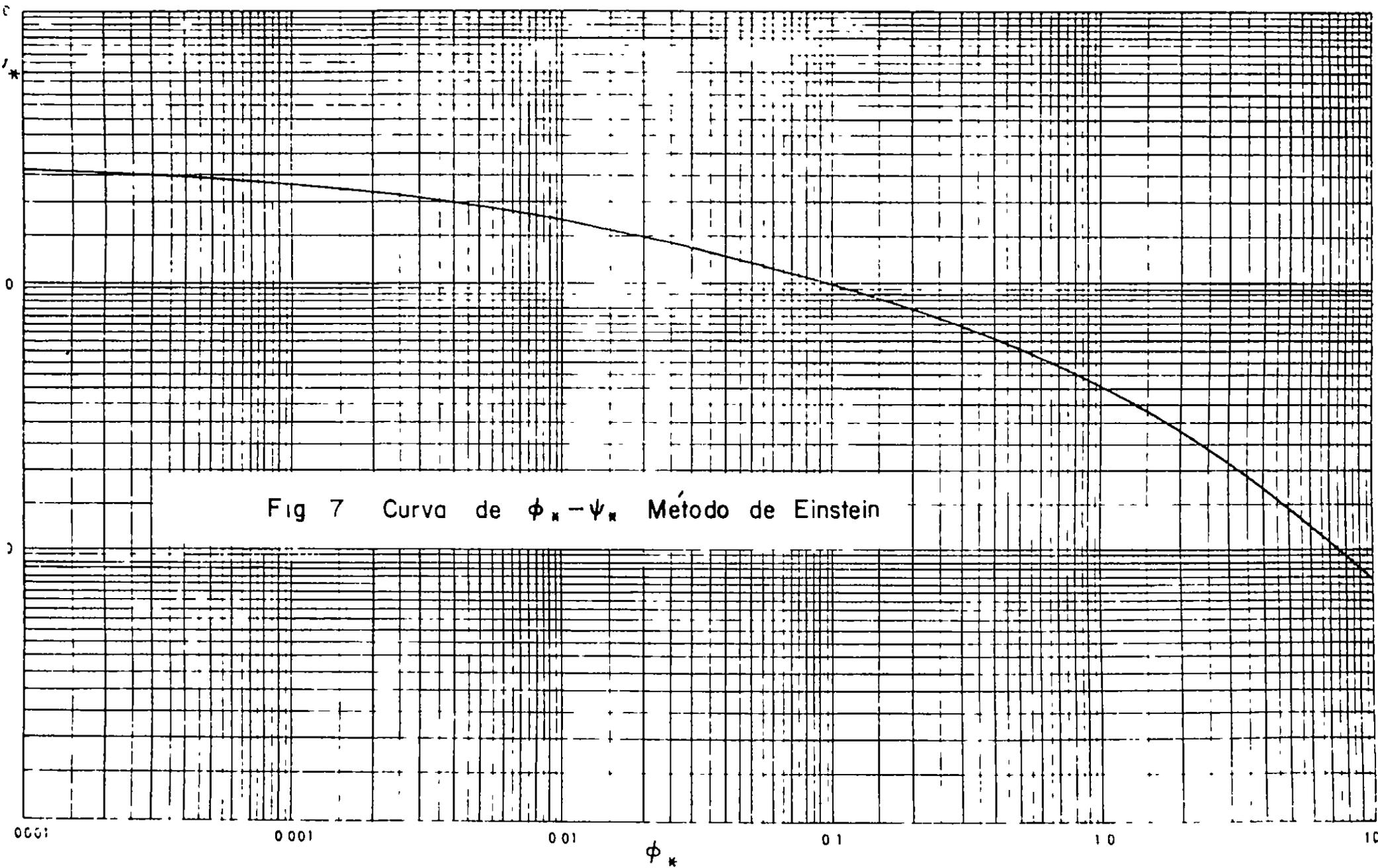


Fig 6 Curva de Shields que indica el inicio de movimiento



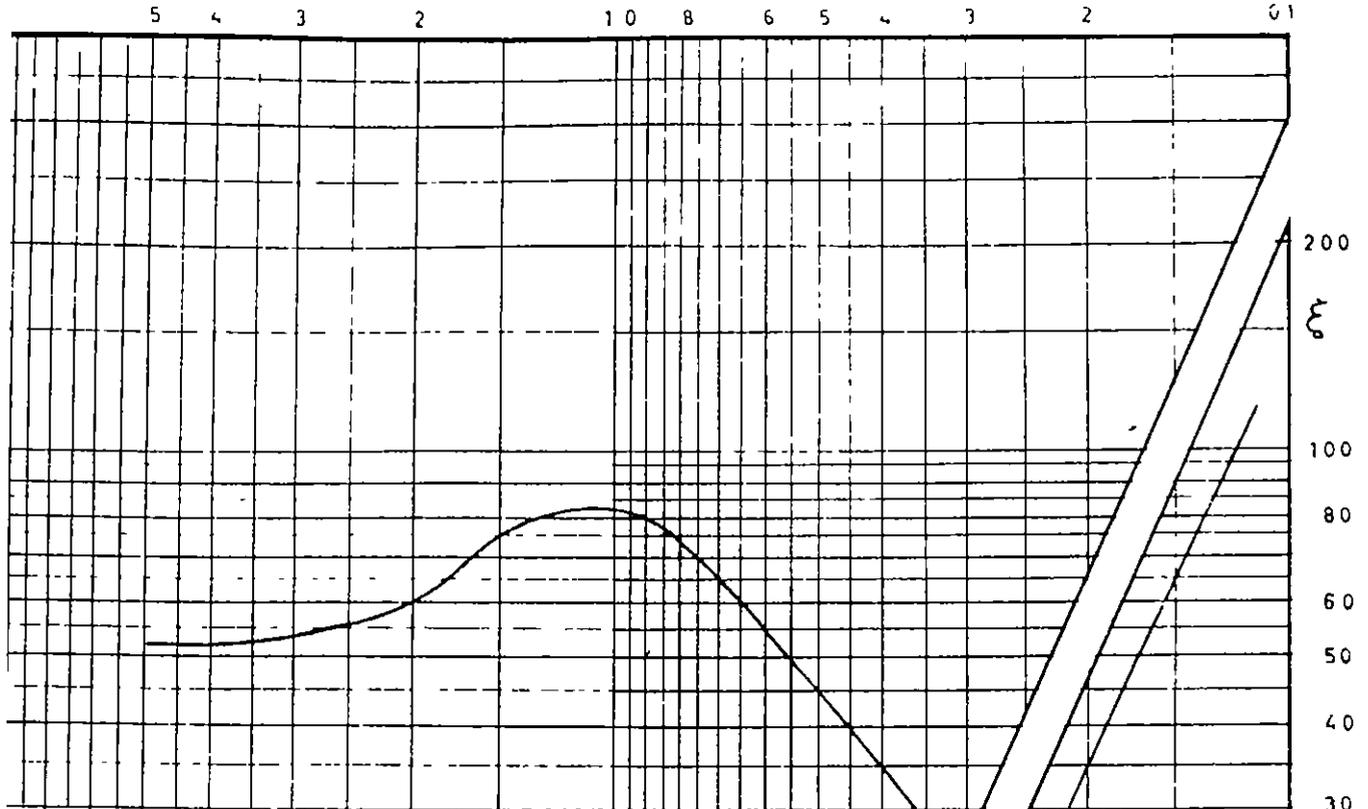


Fig 8 Curva para obtener Y en función de k_s/δ

Método de Einstein

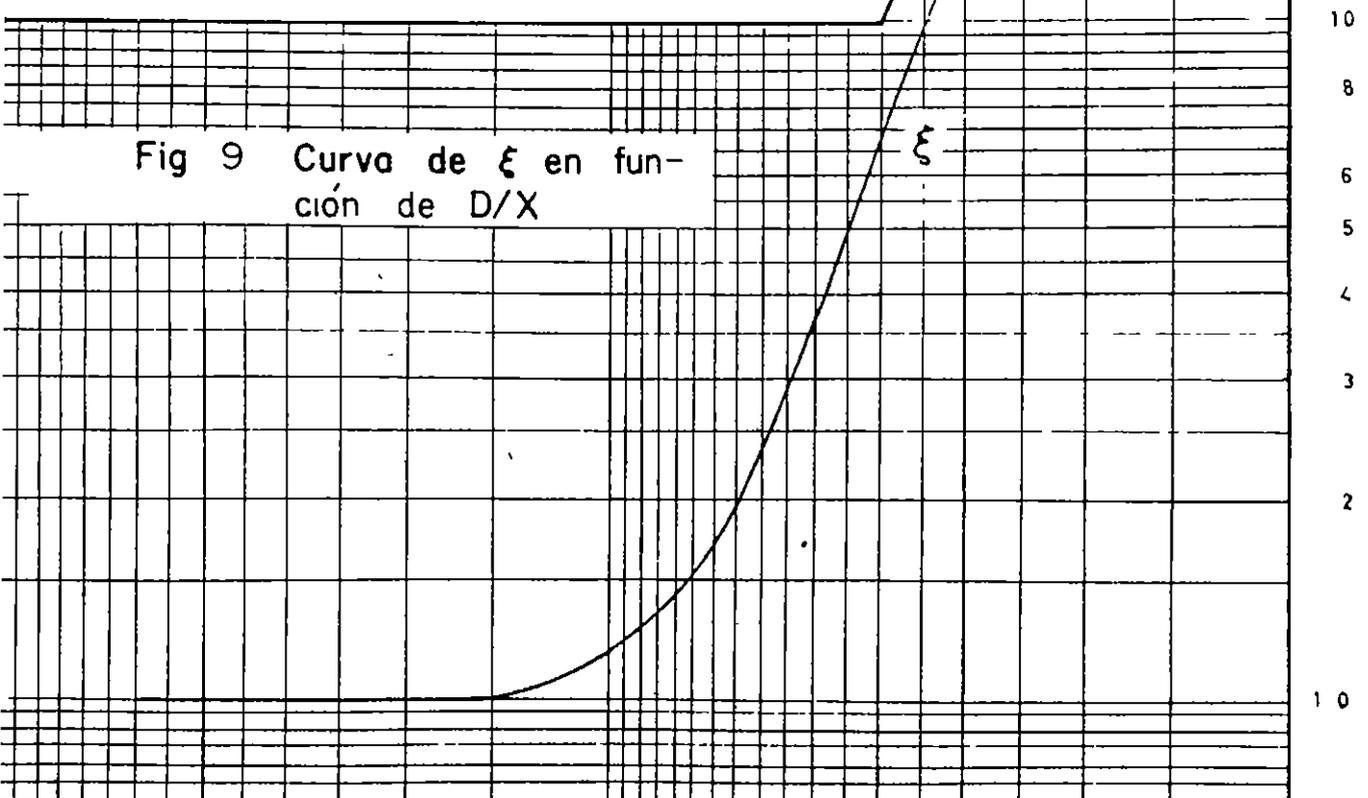


Fig 9 Curva de ξ en función de D/X

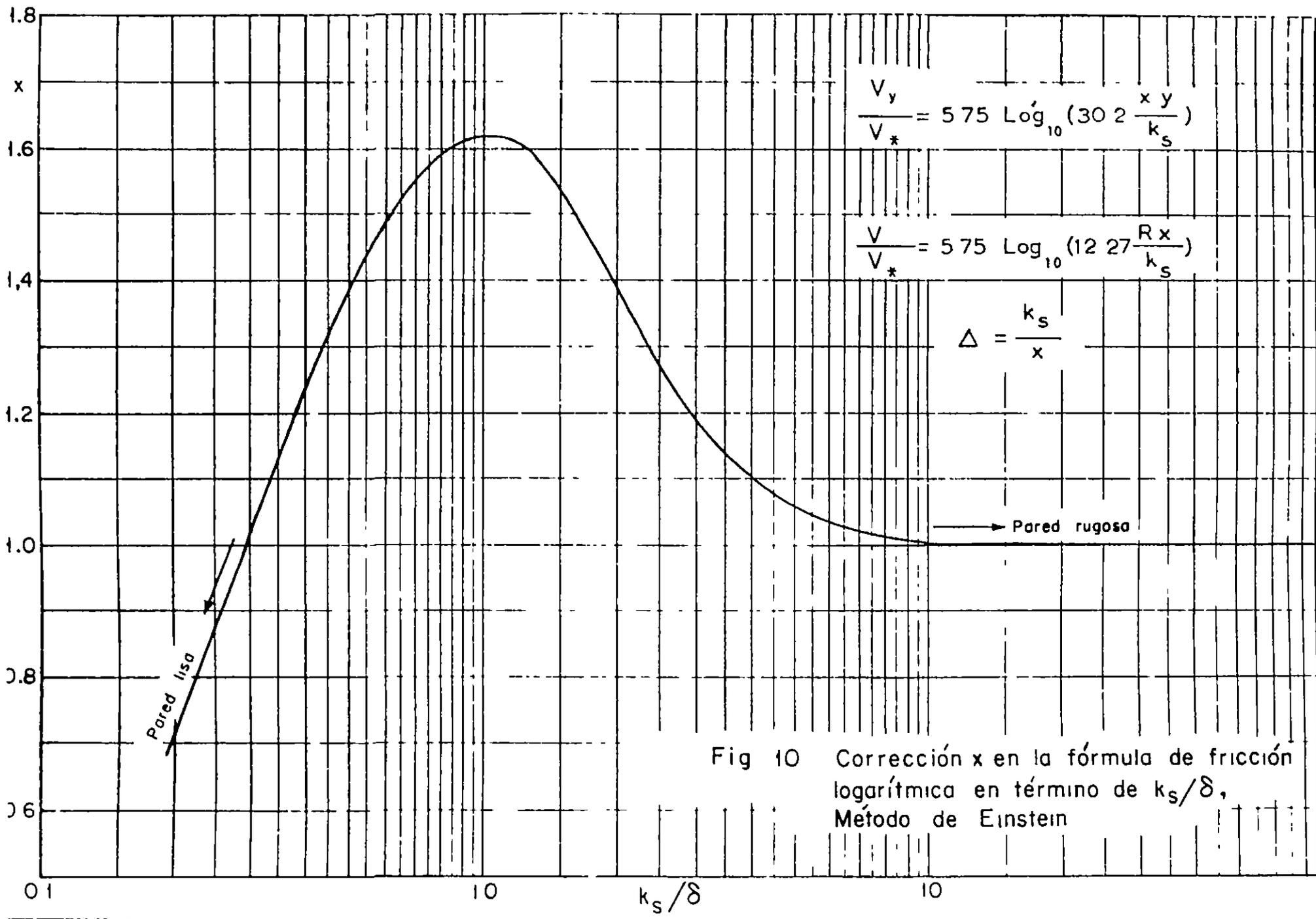


Fig 10 Corrección x en la fórmula de fricción logarítmica en término de k_s/δ , Método de Einstein

Fig 11 Método de Einstein, relación entre escalas

mbolo	H_e	L_e	$(\rho_s - \rho)_e$	C	η_e	B	Δ_F	Δ_δ	Δ_v	Δ
a) Escogiendo la escala de tirantes H_e										
L_e	$\frac{4m+1}{m+1}$	---	---	$\frac{2}{m+1}$	$\frac{m}{m+1}$	---	$\frac{-2}{m+1}$	$\frac{-2m}{m+1}$	1	$\frac{1}{m+1}$
V_e	$\frac{1}{2}$	---	---	---	---	---	1	---	---	---
S_e	$\frac{-3m}{m+1}$	---	---	$\frac{-2}{m+1}$	$\frac{-m}{m+1}$	---	$\frac{2}{m+1}$	$\frac{2m}{m+1}$	---	$\frac{-1}{m+1}$
D_e	$\frac{2m-1}{2(m+1)}$	---	---	$\frac{1}{m+1}$	$\frac{-1}{2(m+1)}$	---	$\frac{-1}{m+1}$	$\frac{1}{m+1}$	---	$\frac{1}{2(m+1)}$
$-\rho)_e$	$\frac{3(1-2m)}{2(m+1)}$	---	---	$\frac{-3}{m+1}$	$\frac{3}{2(m+1)}$	---	$\frac{3}{m+1}$	$\frac{2m-1}{m+1}$	---	$\frac{-3}{2(m+1)}$
q_{B_e}	$\frac{3(1-2m)}{2(m+1)}$	---	---	$\frac{-3}{m+1}$	$\frac{3}{2(m+1)}$	---	$\frac{3}{m+1}$	$\frac{3m}{m+1}$	---	$\frac{-3}{2(m+1)}$
q_{T_e}	$\frac{3(1-2m)}{2(m+1)}$	---	---	$\frac{-3}{m+1}$	$\frac{3}{2(m+1)}$	---	$\frac{3}{m+1}$	$\frac{3m}{m+1}$	---	$\frac{-3}{2(m+1)}$
t_{1e}	$\frac{7m+1}{2(m+1)}$	---	---	$\frac{2}{m+1}$	$\frac{m}{m+1}$	---	$\frac{-(m+3)}{m+1}$	$\frac{-2m}{m+1}$	1	$\frac{1}{m+1}$
t_{2e}	$\frac{5m+2}{m+1}$	---	---	$\frac{2}{m+1}$	$\frac{m}{m+1}$	-1	$\frac{-2}{m+1}$	$\frac{-(3m+1)}{m+1}$	1	$\frac{1}{m+1}$
b) Escogiendo la escala de longitudes L_e										
H_e	---	$\frac{m+1}{4m+1}$	---	$\frac{-2}{4m+1}$	$\frac{-m}{4m+1}$	---	$\frac{2}{4m+1}$	$\frac{2m}{4m+1}$	$\frac{-(m+1)}{4m+1}$	$\frac{-1}{4m+1}$
V_e	---	$\frac{m+1}{2(4m+1)}$	---	$\frac{-1}{4m+1}$	$\frac{-m}{2(4m+1)}$	---	$\frac{2(2m+1)}{4m+1}$	$\frac{m}{4m+1}$	$\frac{2(4m+1)}{4m+1}$	$\frac{-1}{2(4m+1)}$
S_e	---	$\frac{-3m}{4m+1}$	---	$\frac{-2}{4m+1}$	$\frac{-m}{4m+1}$	---	$\frac{2}{4m+1}$	$\frac{2m}{4m+1}$	$\frac{3m}{4m+1}$	$\frac{-1}{4m+1}$
D_e	---	$\frac{2m-1}{2(4m+1)}$	---	$\frac{2}{4m+1}$	$\frac{-(2m+1)}{2(4m+1)}$	---	$\frac{-2}{4m+1}$	$\frac{2m+1}{4m+1}$	$\frac{1-2m}{2(4m+1)}$	$\frac{1}{4m+1}$
$-\rho)_e$	---	$\frac{3(1-2m)}{2(4m+1)}$	---	$\frac{-6}{4m+1}$	$\frac{3(2m+1)}{2(4m+1)}$	---	$\frac{6}{4m+1}$	$\frac{2m-1}{4m+1}$	$\frac{3(2m-1)}{2(4m+1)}$	$\frac{-3}{4m+1}$
q_{B_e}	---	$\frac{3(1-2m)}{2(4m+1)}$	---	$\frac{-6}{4m+1}$	$\frac{3(2m+1)}{2(4m+1)}$	---	$\frac{6}{4m+1}$	$\frac{6m}{4m+1}$	$\frac{3(2m-1)}{2(4m+1)}$	$\frac{-3}{4m+1}$
q_{T_e}	---	$\frac{3(1-2m)}{2(4m+1)}$	---	$\frac{-6}{4m+1}$	$\frac{3(2m+1)}{2(4m+1)}$	1	$\frac{6}{4m+1}$	$\frac{6m}{4m+1}$	$\frac{3(2m-1)}{2(4m+1)}$	$\frac{-3}{4m+1}$
t_{1e}	---	$\frac{7m+1}{2(4m+1)}$	---	$\frac{1}{4m+1}$	$\frac{m}{2(4m+1)}$	---	$\frac{-2(2m+1)}{4m+1}$	$\frac{-m}{4m+1}$	$\frac{m+1}{2(4m+1)}$	$\frac{1}{2(4m+1)}$
t_{2e}	---	$\frac{5m+2}{4m+1}$	---	$\frac{-2}{4m+1}$	$\frac{-m}{4m+1}$	-1	$\frac{2}{4m+1}$	$\frac{-(2m+1)}{4m+1}$	$\frac{-(m+1)}{4m+1}$	$\frac{-1}{4m+1}$
c) Escogiendo la escala de densidad de sedimento $(\rho_s - \rho)_e$										
L_e	---	---	$\frac{-2(4m+1)}{3(2m-1)}$	$\frac{-4}{2m-1}$	$\frac{2m+1}{2m-1}$	---	$\frac{4}{2m-1}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{-2}{2m-1}$
H_e	---	---	$\frac{-2(m+1)}{3(2m-1)}$	$\frac{-2}{2m-1}$	$\frac{1}{2m-1}$	---	$\frac{2}{2m-1}$	$\frac{2}{3}$	---	$\frac{-1}{2m-1}$
V_e	---	---	$\frac{(m+1)}{3(2m-1)}$	$\frac{-1}{2m-1}$	$\frac{1}{2(2m-1)}$	---	$\frac{2m}{2m-1}$	$\frac{1}{3}$	---	$\frac{-1}{2(2m-1)}$
S_e	---	---	$\frac{2m}{2m-1}$	$\frac{2}{2m-1}$	$\frac{-2m}{2m-1}$	---	$\frac{-2}{2m-1}$	---	---	$\frac{1}{2m-1}$
D_e	---	---	$-\frac{1}{3}$	---	---	---	---	$\frac{2}{3}$	---	---
q_{B_e}	---	---	1	---	---	---	---	1	---	---
q_{T_e}	---	---	1	---	---	1	---	1	---	---
t_{1e}	---	---	$\frac{-(7m+1)}{3(2m-1)}$	$\frac{-3}{2m-1}$	$\frac{4m+1}{2(2m-1)}$	---	$\frac{2(2-m)}{2m-1}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{-3}{2(2m-1)}$
t_{2e}	---	---	$\frac{-2(5m+2)}{3(2m-1)}$	$\frac{-6}{2m-1}$	$\frac{2(m+1)}{2m-1}$	-1	$\frac{6}{2m-1}$	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{-3}{2m-1}$

Fig 12. Valores de f , A y β para cauces estables, en que el gasto formativo es del 3 al 10%, en un año (solo el 3 al 10% de los gastos anuales son mayores que ese gasto).

Zona del río y condición del cauce	f	Número de Froude	Parámetro A tipo de sección		Exponente β cuando $k = 10$ tipo de sección	
			a	b	a	b
Zona de alta montaña cauce rocoso o cubierto de piedras.	10	1.0	0.50	0.75	1.00	1.0
Zona de montaña. Cauce formado con cantos rodados boleo y guijarros. Rápidas y pendiente cercana a la crítica.	7	1.0 - 0.5	0.75	0.90	1.00	0.80
Zona en las faldas de la montaña. Llegada del río al valle. Cauce formado de guijarros grava y arena. Corriente tranquila.	6	0.50 - 0.20	0.90	1.0	0.80	0.75
Zona intermedia. Cauce formado de arena gruesa, media y fina. Corriente tranquila.	5	0.20 - 0.04	1.0	1.1	0.75	0.70
Zona de planicie. --- Cauce formado de arena fina.						
a). Río caudaloso.	2	0.20 - 0.02	1.1	1.3	0.75	0.70
b). Río poco caudaloso.	1	0.30 - 0.20	1.3	1.7	0.60	0.50

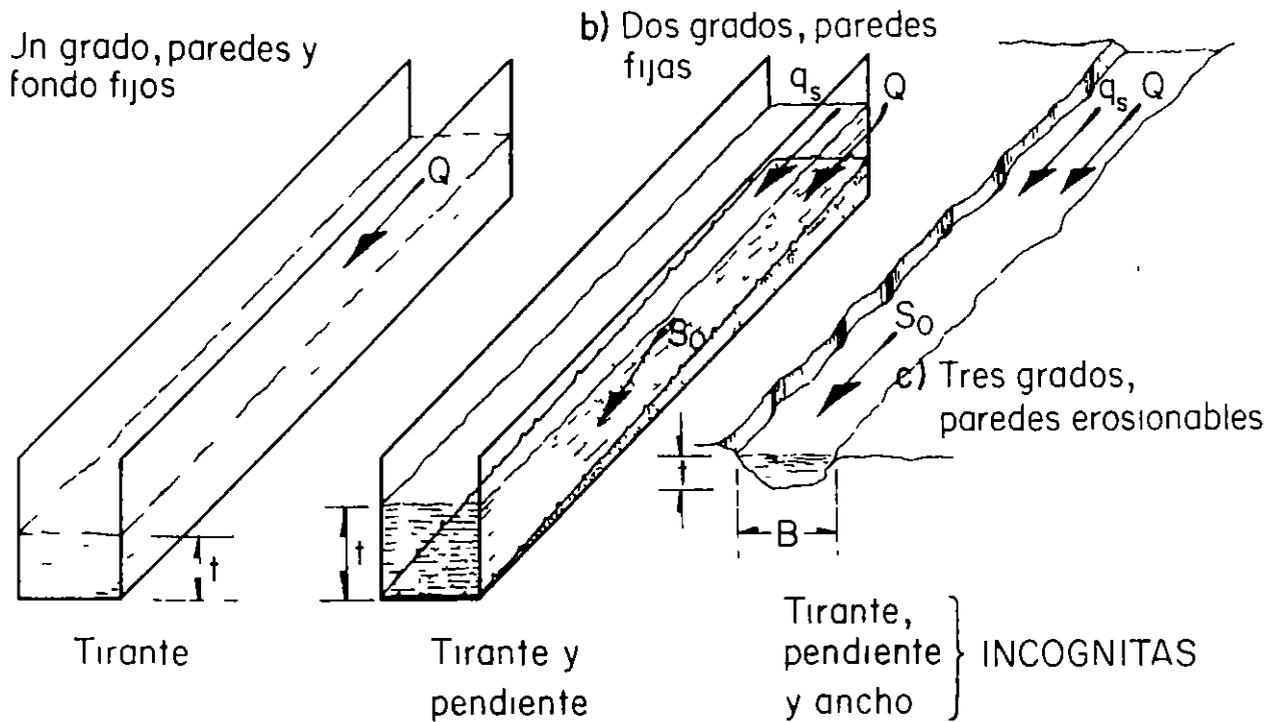


Fig 13 Grados de libertad

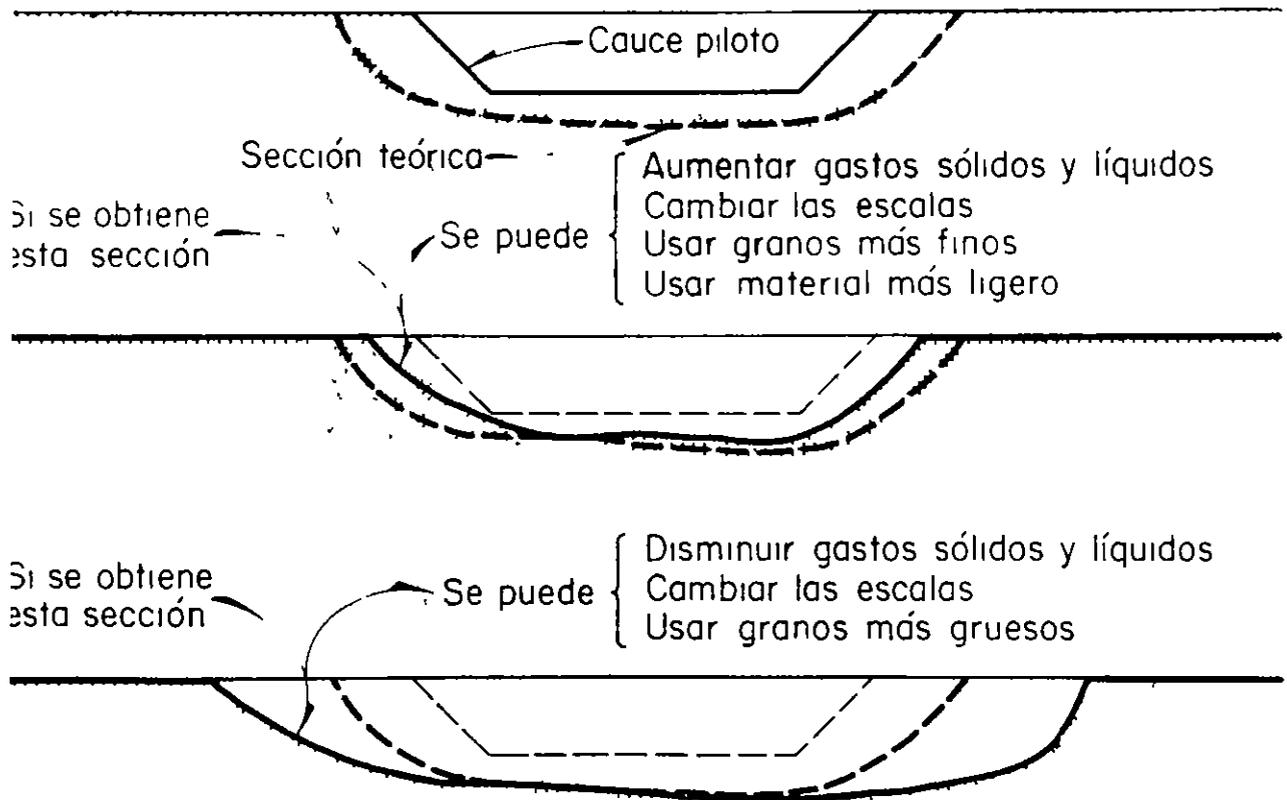


Fig 14 Variación entre la sección teórica y la sección piloto durante la calibración auxiliar

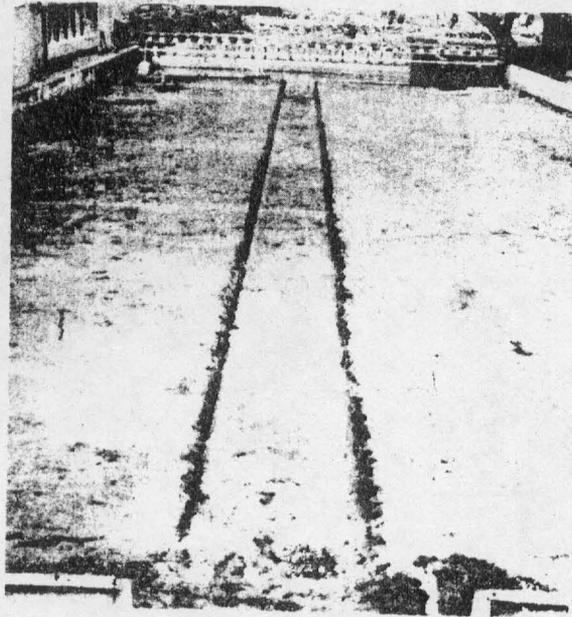


Fig 15 Cauce piloto al inicio de la calibración auxiliar.
Nótese la instalación empleada para hacer
dicha calibración

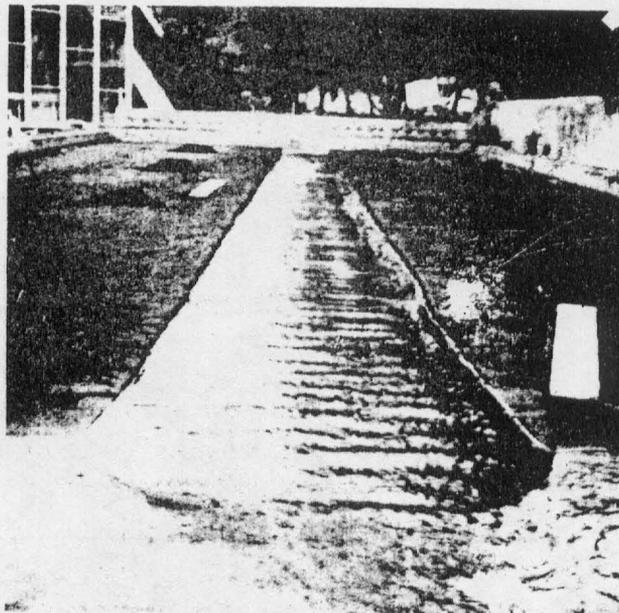


Fig 16 Sección teórica alcanzada en un ensaye durante
la calibración auxiliar

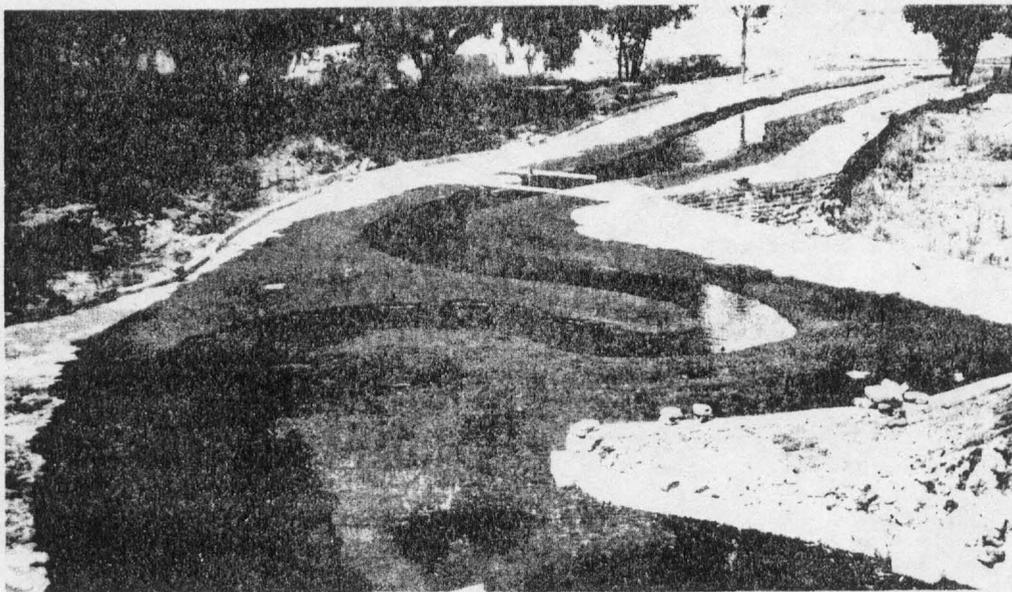


Fig 17 Modelo fluvial de fondo móvil durante la calibración total (Ajuste del 4º grado de libertad)