

# MODELO DE CELDILLAS DE MEZCLADO PARA CALCULAR OD Y DBO EN RIOS Y LAGOS

ROBERT B. BANKS

PATROCINADO POR  
SECRETARÍA DE RECURSOS HIDRÁULICOS

ABRIL 1973 337

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

# Modelo de celdillas de mezclado para calcular oxígeno disuelto y demanda bioquímica de oxígeno en ríos y lagos

Robert B Banks \*

## 1. INTRODUCCION

Durante muchos años se han dedicado numerosos estudios a determinar la distribución de la demanda bioquímica de oxígeno (DBO) y de oxígeno disuelto (OD) en ríos. Generalmente se ha considerado que el flujo es permanente y uniforme, lo que conduce a soluciones relativamente simples, unidimensionales, acerca de la distribución de DBO y OD.

Cuando el flujo es bi o tridimensional, como en un lago, por ejemplo, el problema es mucho más complicado. El modelo **determinístico**, del todo satisfactorio para el caso unidimensional, es extremadamente difícil de aplicar cuando el flujo no es unidimensional. De acuerdo con esto, es necesario utilizar un modelo **estocástico** para el caso del lago.

Dicho modelo se presenta en este trabajo. Se basa en la idea de una matriz de celdillas de mezclado y se considera que ocurre un mezclado completo en cada celdilla. También aparecen dos ejemplos para ilustrar el método de cálculo. El primero comprende el uso de un patrón de celdillas rectangulares y el segundo utiliza uno de celdillas de mezclado definidas por las líneas de corriente y equipotenciales de una red de flujo.

La Dirección General de Usos del Agua y Prevención de la Contaminación, de la Secretaría de Recursos Hidráulicos, financia al Instituto de Ingeniería, UNAM, para que lleve a cabo un análisis extensivo del lago de Chapala. En el estudio se utiliza el modelo de celdillas de mezclado para determinar la influencia de los ríos Lerma y Santiago en la distribución de DBO y OD en la región este del lago. Los valores calculados de los dos parámetros concuerdan razonablemente bien con los valores observados. Se emplearán datos adicionales obtenidos en el estudio actual del lago dentro del esqueleto del modelo de celdillas de mezclado.

\* Profesor investigador, Facultad de Ingeniería, UNAM

Durante los últimos años ha aumentado el interés por el estado del medio ambiente. Los productos de desecho descargados en la atmósfera y en nuestras aguas y tierras, están alcanzando proporciones alarmantes. Esta situación tan grave ha producido una respuesta mundial. En muchos países, ingenieros, científicos y otros especialistas están estudiando y solucionando innumerables casos de contaminación ambiental.

En México se ha progresado considerablemente durante los últimos años en los esfuerzos para eliminar o reducir la contaminación de aire y agua. La Secretaría de Recursos Hidráulicos, a través de la Dirección General de Usos del Agua y Prevención de la Contaminación, está llevando a cabo un vigoroso programa de actividades en el área de contaminación de aguas. Además de otros esfuerzos en este sentido, la Dirección ha destinado fondos para que el Instituto de Ingeniería realice estudios de campo en varias fuentes de agua importantes para el país, así, los ríos Coatzacoalcos y Pánuco y el lago Chapala.

El estudio sobre Chapala se lleva a cabo desde el año pasado. Este lago, el más extenso en México, y su vaso, son recursos extremadamente importantes para pesca, turismo, agricultura e industria. Es imperativo impedir que este lago se convierta en "muerto", como ha sucedido con muchos otros en el mundo.

Se han investigado diversos factores socioeconómicos, hidrológicos, fisicoquímicos, bacteriológicos, biológicos, de mecánica de fluidos y bioquímicos. Además, se han desarrollado varios tipos de modelos matemáticos, como el que se describe a continuación, para tratar de predecir el comportamiento del lago bajo diversas condiciones.

Se presenta un método para calcular las distribuciones de oxígeno disuelto y demanda bioquímica de oxígeno en cuerpos de agua con forma lacustre. Estos dos parámetros son índices muy importantes para determinar el grado de contaminación de un cuerpo de agua y su capacidad de asimilar la contaminación.

## 2. MODELO DETERMINISTICO

Un balance de masa en un volumen elemental lleva a las siguientes ecuaciones diferenciales para las distribuciones de DBO y OD

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} + u \frac{\partial L}{\partial x} + v \frac{\partial L}{\partial y} + \\ + K_1 L = \frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial L}{\partial x}) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial L}{\partial y}) + L^* \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + \\ + K_1 L = \frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial C}{\partial x}) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial C}{\partial y}) + \\ + K_2 (C_s - C) + (K_p - K_r - K_b) \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde  $L$  es la DBO y  $C$  el OD, ambos expresados en unidades de mg/lt. Los componentes de velocidad en el plano horizontal  $(x,y)$  son  $u(x,y,t)$  y  $v(x,y,t)$ , los coeficientes de difusión turbulenta en las direcciones  $x$  y  $y$  están dados por  $K_x$  y  $K_y$ , respectivamente. La generación o remoción de DBO se representa por  $\pm L^*(x,y,t)$ . Los coeficientes de desoxigenación y reaeración se expresan como  $K_1$  y  $K_2$ . La concentración de oxígeno a la saturación es  $C_s$ , esta cifra es una función de la temperatura y la presión atmosférica. Las cantidades  $K_p$ ,  $K_r$  y  $K_b$  representan, respectivamente, la producción de oxígeno por fotosíntesis y su utilización por respiración de las plantas y por depósitos bentales. Se debe hacer notar que las ecs 2.1 y 2.2 son semiacopladas en el sentido de que  $L$  aparece en la segunda ecuación. Estas expresiones son fácilmente ampliables para el caso tridimensional.

Hace muchos años, Streeter y Phelps (ref 1) obtuvieron formas muy simplificadas de las ecs 2.1 y 2.2 en su estudio del río Ohio:

$$U \frac{dL}{dx} + K_1 L = 0 \quad (2.3)$$

$$U \frac{dC}{dx} + K_1 L = K_2 (C_s - C) \quad (2.4)$$

Estas expresiones reflejan las siguientes simplificaciones en las ecs 2.1 y 2.2: flujo uniforme permanente ( $U = Q/A$ ) en un río o canal, se desprecian las difusiones longitudinal y lateral y las cifras  $L^*$ ,  $K_p$ ,  $K_r$  y  $K_b$  son todas cero. Con las condiciones de frontera  $L(0) = L_0$  y  $C(0) = C_0$ , las soluciones de las ecs 2.3 y 2.4 son

$$L = L_0 \exp(-K_1 x/U) \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} D^* = \frac{K_1 L_0}{K_2 - K_1} \left[ \exp(-K_1 x/U) - \right. \\ \left. - \exp(-K_2 x/U) \right] + \\ + D_0^* \exp(-K_2 x/U) \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde  $D^* = C_s - C$  y  $D_o^* = C_s - C_o$ . Estos resultados fueron obtenidos por Streeter y Phelps, la ec 2.6 se suele denominar curva de pandeo de oxígeno colgante

Para ilustrar la aplicación de estas ecuaciones, se seleccionaron las siguientes cifras

$$L_o = 10.0 \text{ mg/lit}$$

$$C_o = 5.0 \text{ mg/lit}$$

$$C_s = 7.0 \text{ mg/lit}$$

$$K_1 = 0.20 \text{ día}^{-1}$$

$$K_2 = 0.30 \text{ día}^{-1}$$

$$U = 0.05 \text{ m/seg}$$

Sustituyendo estos valores en las ecs 2.5 y 2.6, se obtienen las dos curvas mostradas en la fig 1. Se observa que la concentración de OD tiene un valor mínimo de 3.4 mg/lit a una localización de alrededor de 13 km aguas abajo de su origen. Después de eso la concentración se incrementa gradualmente hasta alcanzar el valor asintótico  $C_s = 7.0 \text{ mg/lit}$

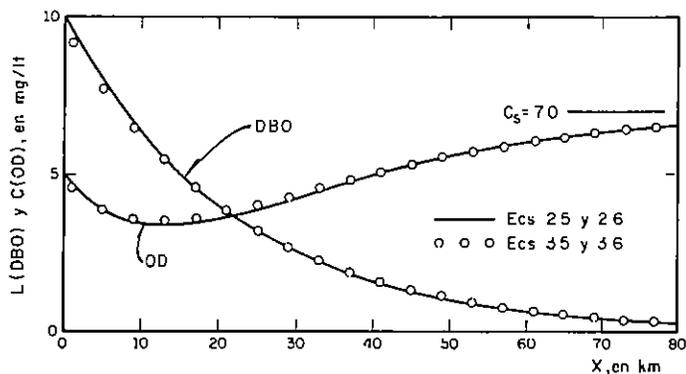


Fig 1

### 3. MODELO ESTOCÁSTICO

El problema anterior fue relativamente fácil de resolver por las diferentes suposiciones que se hicieron. No obstante, para formas geométricas más complicadas que un canal de flujo unidimensional, se necesita un mejor método de cálculo. En otras palabras, el modelo determinístico del cap 2 es, excepto en casos muy especiales, extremadamente difícil de emplear. Por tanto, se desarrolla ahora un modelo estocástico para aplicar en el problema general de flujo bidimensional (x,y).

Como se ilustra en la fig 2, supóngase que un río fluye hacia un lago de gran capacidad con una descarga  $Q_o$  y que dicho lago está compuesto por una matriz de celdillas de mezclado, cada una con dimensiones

horizontales  $x_o$  y  $y_o$  y profundidad  $D$ . Como se indica en la fig 3, las descargas de oeste a este que entran y salen de la celdilla (j,k) son  $Q_{j,k-1}$  y  $Q_{j,k}$ , respectivamente. Asimismo, las descargas de sur a norte son  $P_{j-1,k}$  y  $P_{j,k}$ . La suposición adicional es que ocurre un mezclado completo en cada celdilla. Esto equivale a decir que las concentraciones de DBO y OD dentro de una celdilla en particular son iguales a sus concentraciones en los efluentes  $Q_{j,k}$  y  $P_{j,k}$  de esa celdilla



Fig 2

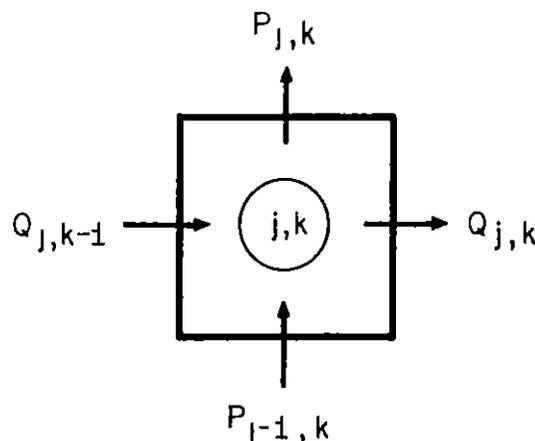


Fig 3

Un balance de masa para DBO en la celdilla j,k da

$$\frac{dL_{j,k}}{dt} + \left( K_1 + \frac{Q_{j,k} + P_{j,k}}{V} \right) L_{j,k} = L^* + \left( \frac{Q_{j,k-1} L_{j,k-1} + P_{j-1,k} L_{j-1,k}}{V} \right) \quad (3.1)$$

donde  $V = x_o y_o D$  es el volumen de la celdilla. El primer término en el lado izquierdo de la ec 3.1 representa la razón de acumulación de DBO en la celdilla. Un balance de masa similar para OD conduce a

$$\frac{dC_{j,k}}{dt} + \left( K_2 + \frac{Q_{j,k} + P_{j,k}}{V} \right) C_{j,k} = K^* - K_1 L_{j,k} + \left( \frac{Q_{j,k-1} C_{j,k-1} + P_{j-1,k} C_{j-1,k}}{V} \right) \quad (3.2)$$

donde  $K^* = K_2 C_s + K_p - K_r - K_b$ .

Para el problema de estado permanente ( $d/dt = 0$ ), las ecs 3.1 y 3.2 quedarán

$$L_{j,k} = \frac{Q_{j,k-1} L_{j,k-1} + P_{j-1,k} L_{j-1,k} + L^* V}{Q_{j,k} + P_{j,k} + K_1 V} \quad (3.3)$$

$$C_{j,k} = \frac{Q_{j,k-1} C_{j,k-1} + P_{j-1,k} C_{j-1,k}}{Q_{j,k} + P_{j,k} + K_2 V} + \frac{(K^* - K_1 L_{j,k}) V}{Q_{j,k} + P_{j,k} + K_2 V} \quad (3.4)$$

Como un primer ejemplo del método de aplicación de este modelo de "celdillas de mezclado", se verá el problema del cap 2: distribución de DBO y OD en un canal abierto con flujo uniforme permanente. En este caso,  $Q_{j,k} = Q_0 =$  constante y  $P_{j,k} = 0$ . Tomando  $L^*$ ,  $K_p$ ,  $K_r$  y  $K_b$  como cero, las ecs 3.3 y 3.4 se convierten simplemente en

$$L_k = \frac{L_{k-1}}{1 + (K_1 x_0 / U)} \quad (3.5)$$

$$C_k = \frac{C_{k-1} + (K_2 C_s - K_1 L_k) (x_0 / U)}{1 + (K_2 x_0 / U)} \quad (3.6)$$

Seleccionando  $x_0 = 2.0$  km como la longitud de una celdilla de mezclado, y usando los valores anteriores para  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $C_s$  y  $U$ , los resultados de los cálculos basados en las ecs 3.5 y 3.6 son los que se muestran en la fig 1. Se observa que los resultados del modelo estocástico concuerdan con los resultados del modelo determinístico.

#### 4. EJEMPLO: FLUJO DESDE UNA FUENTE

Se supone que un fluido que contiene concentraciones iniciales  $L_0$  y  $C_0$  fluye desde una fuente hacia una región plana infinita. Este patrón de flujo correspondería aproximadamente a un río con velocidad baja entrando a un lago grande o al flujo de un pozo hacia un acuífero confinado. La función de corriente para tal flujo está dada por

$$\Psi = - (m/2\pi) \text{arc tan } (y/x) \quad (4.1)$$

donde  $m$  es la intensidad de la fuente. Para el flujo de un río hacia un lago es necesario usar  $m = 2Q_0/D$ , puesto que hay un flujo ficticio en la dirección contraria. Entonces

$$\Psi = - (Q_0/\pi D) \text{arc tan } (y/x) \quad (4.2)$$

donde  $Q_0$  es la descarga real hacia el lago. Utilizando las relaciones

$$u = - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad y \quad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (4.3)$$

se obtienen las distribuciones de velocidad

$$u = \frac{Q_0}{\pi D} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad y \quad v = \frac{Q_0}{\pi D} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \quad (4.4)$$

Con objeto de emplear las ecuaciones de las celdillas de mezclado (3.3 y 3.4), es necesario determinar las cantidades  $Q_{j,k}$  y  $P_{j,k}$ . Esto puede ser calculado con base en sus definiciones

$$Q_{j,k} = \int_{j-1,k}^{j,k} u D dy \quad y \quad P_{j,k} = \int_{j,k-1}^{j,k} v D dx \quad (4.5)$$

Tomando  $x = x_0 k$  y  $y = y_0 j$ , y sustituyendo las ecs 4.4 en las 4.5, se obtiene, con  $x_0 = y_0$  y un valor constante de  $D$

$$Q_{j,k} = \frac{Q_0}{\pi} \text{arc tan } \frac{k}{k^2 + j^2 - j} \quad (4.6)$$

$$P_{j,k} = \frac{Q_0}{\pi} \text{arc tan } \frac{j}{j^2 + k^2 - k} \quad (4.7)$$

Los valores de  $Q_{j,k}$  y  $P_{j,k}$  son fácilmente calculables con estas ecuaciones para rangos apropiados de  $j, k$ . Subsecuentemente, estas cantidades son sustituidas en las ecs 3.3 y 3.4 para determinar  $L_{j,k}$  y  $C_{j,k}$ .

Usando  $Q_0 = 50 \text{ m}^3/\text{seg}$ ,  $L_0 = 100 \text{ mg/lit}$ ,  $C_0 = 50 \text{ mg/lit}$ ,  $C_s = 7.0 \text{ mg/lit}$ ,  $K_1 = 0.20 \text{ día}^{-1}$ ,  $K_2 = 0.30 \text{ día}^{-1}$ , y  $x_0 = y_0 = 200 \text{ m}$ , se obtienen los resultados de la tabla 1. El número superior en cada celdilla es la *DBO* y el inferior es el *OD*. Obviamente, en este ejemplo existe simetría con respecto a la diagonal en la tabla. Una celdilla localizada sobre esta línea representa la distancia radial de esa celdilla desde el origen. Los valores de *DBO* y *OD* correspondientes a las celdillas de la diagonal se muestran en los puntos circulares de la fig 4.

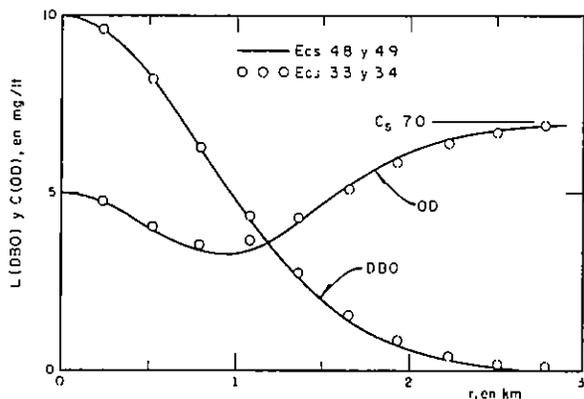


Fig 4

Se relacionó este ejemplo de flujo desde una fuente porque es fácil obtener la solución para el mismo problema desde el punto de vista determinístico. Un balance de masa sobre un volumen elemental cilíndrico da los resultados

$$L = L_0 \exp(-\alpha r^2) \quad (4.8)$$

$$D^* = \frac{K_1 L_0}{K_2 - K_1} \left[ \exp(-\alpha r^2) - \exp(-\beta r^2) \right] + D_0^* \exp(-\beta r^2) \quad (4.9)$$

donde  $\alpha = \pi K_1 D / 2Q_0$  y  $\beta = \pi K_2 D / 2Q_0$ ; como antes,  $D^* = C_s - C$  y  $D_0^* = C_s - C_0$ . Empleando las mismas cifras que en el cálculo estocástico, se obtienen las curvas sólidas de la fig 4. Otra vez existe bastante concordancia entre los dos métodos de cálculo. Se observa que la concentración de *OD* tiene un valor mínimo de aproximadamente 3.3 mg/lit, a un km, aproximadamente, de su origen. Ciertamente, la ec 4.8 también describe la concentración de una sustancia radiactiva decayente introducida en un pozo de disposición. La ec 4.9 es la ecuación de Streeter-Phelps, en forma cilíndrica.

## 5. EJEMPLO: FLUJO DESDE UNA FILA INFINITA DE FUENTES

Un ejemplo final de la aplicación del modelo de celdillas de mezclado para determinar las distribuciones de *DBO* y *OD* es el flujo desde una fila infinita de fuentes localizadas a lo largo del eje-*y*. El complejo potencial para tal flujo es dado por Milne-Thompson (ref 2)

$$w = - (Q_0 / \pi D) \log_e \sinh(\pi z / B) \quad (5.1)$$

donde *B* es la distancia entre las fuentes y  $z = x + iy$ . Los componentes de velocidad calculados con esta ecuación son

$$u = U \frac{\sinh \lambda x}{\cosh \lambda x - \cos \lambda y} \quad (5.2)$$

$$v = U \frac{\sin \lambda x}{\cosh \lambda x - \cos \lambda y} \quad (5.3)$$

donde  $U = Q_0 / BD$  y  $\lambda = 2\pi / B$ . Según la ec 5.1, la velocidad potencial y la función de corriente son

$$\Phi = - \frac{Q_0}{\pi D} \log_e (\cosh \lambda x - \cos \lambda y) \quad (5.4)$$

$$\Psi = - \frac{Q_0}{\pi D} \arctan \left( \frac{\sinh \lambda x \sin \lambda y}{\cosh \lambda x \cos \lambda y - 1} \right) \quad (5.5)$$

Con base en estas ecuaciones, las líneas de corriente y equipotenciales para este tipo de flujo se muestran en la fig 5 para valores de  $Q_0 = 50 \text{ m}^3/\text{seg}$ ,  $D = 10 \text{ m}$  y  $B = 1000 \text{ m}$ . Conviene indicar que el flujo desde una fila infinita de fuentes corresponde aproximadamente al flujo de un río hacia un lago de ancho arbitrario *B*.

La sustitución de las ecs 5.2 y 5.3 en las ecs 4.5 permite calcular las cantidades  $Q_{j,k}$  y  $P_{j,k}$  como en el ejemplo de la sec 4. Siguiendo esto, los valores de  $L_{j,k}$  y  $C_{j,k}$  pueden calcularse para cada celdilla rectangular, de dimensiones  $x_0$  y  $y_0$ , usando las ecs 3.3 y 3.4.

Es obvio que se puede tener otra alternativa de cálculo y, en este ejemplo, esta es indudablemente más sencilla. Así, si se conoce la red de flujo para un patrón particular de flujo, las celdillas de mezclado a ser empleadas pueden ser aquellas regiones definidas por las diferentes líneas de corriente y equipotenciales. Por definición, las líneas de corriente adyacentes confinan una descarga constante. De acuerdo con lo anterior, con este método alternativo, las descargas son constantes y los volúmenes de las celdillas varían. Sucede lo contrario en el caso del método descrito en la sec 4.

TABLA I VALORES DE *DBO* (NUMEROS SUPERIORES) Y DE *OD* (NUMEROS INFERIORES) PARA CADA CELDILLA, CALCULADOS DE ACUERDO CON EL MODELO DE CELDILLAS DE MEZCLADO

Valor de <i>j</i>	10	0.99 5.74	0.91 5.80	0.76 5.93	0.61 6.11	0.48 6.31	0.36 6.45	0.25 6.60	0.17 6.70	0.12 6.81	0.08 6.87
	9	1.51 5.26	1.39 5.34	1.16 5.49	0.94 5.73	0.73 5.94	0.56 6.23	0.39 6.37	0.27 6.54	0.18 6.68	0.12 6.81
	8	2.15 4.61	2.06 4.82	1.71 5.00	1.39 5.28	1.08 5.58	0.82 5.92	0.58 6.16	0.40 6.39	0.27 6.54	0.17 6.70
	7	3.10 4.17	2.92 4.28	2.43 4.50	1.96 4.79	1.53 5.15	1.15 5.51	0.83 5.85	0.58 6.16	0.39 6.37	0.25 6.60
	6	4.20 3.76	3.94 3.81	3.28 4.02	2.69 4.35	2.09 4.70	1.58 5.10	1.15 5.51	0.82 5.92	0.56 6.23	0.36 6.45
	5	5.45 3.57	5.17 3.58	4.27 3.70	3.49 3.95	2.74 4.30	2.09 4.70	1.53 5.15	1.08 5.58	0.73 5.94	0.48 6.31
	4	6.74 3.65	6.11 3.57	5.24 3.54	4.34 3.67	3.49 3.95	2.69 4.35	1.96 4.79	1.39 5.28	0.94 5.73	0.61 6.11
	3	7.97 3.96	7.24 3.73	6.30 3.56	5.24 3.54	4.27 3.70	3.28 4.02	2.43 4.50	1.71 5.00	1.16 5.49	0.76 5.93
	2	8.97 4.39	8.22 4.05	7.24 3.73	6.11 3.57	5.17 3.58	3.94 3.81	2.92 4.28	2.06 4.82	1.39 5.34	0.91 5.80
	1	9.64 4.77	8.97 4.39	7.97 3.96	6.74 3.65	5.45 3.57	4.20 3.76	3.10 4.17	2.15 4.61	1.51 5.26	0.99 5.74
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$L_n = 10$   
 $C_o = 5$

Valor de *k*

Así, considerando  $L^* = 0$  y  $K^* = K_2 C_s$ , las ecs 3 3 y 3 4 quedan

$$L_{j,k} = \frac{L_{j,k-1}}{1 + (K_1 V_{j,k} / Q_j)} \quad (5 6)$$

$$C_{j,k} = \frac{C_{j,k-1} + (K_2 C_s - K_1 L_{j,k}) (V_{j,k} / Q_j)}{1 + (K_2 V_{j,k} / Q_j)} \quad (5 7)$$

donde  $V_{j,k}$  es el volumen de la celdilla de mezclado  $j,k$  y  $Q_j = Q_0/n$ , donde  $n$  es el número de "canales" en la red de flujo. Se determinaron las áreas y de ahí los volúmenes de los "cuadrados" de la fig 5, dichos valores fueron sustituidos en las ecs 5 6 y 5 7 para calcular  $L_{j,k}$  y  $C_{j,k}$ . Se emplearon valores de  $K_1 = 0.30 \text{ día}^{-1}$ ,  $K_2 = 0.40 \text{ día}^{-1}$  y  $C_s = 7.0 \text{ mg/lit}$ . Los resultados se presentan en la fig 6. La mitad superior del diagrama muestra la distribución de *DBO* y la inferior, la de *OD*. La línea discontinua indica la localización del valor mínimo de *OD*, que es, aproximadamente,  $3.2 \text{ mg/lit}$ .

Si se desprecian las difusiones longitudinal y lateral, y se considera un flujo de estado permanente, las ecs 2 1 y 2 2 quedan

$$u \frac{\partial L}{\partial x} + v \frac{\partial L}{\partial y} + K_1 L = 0 \quad (5 8)$$

$$u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + K_1 L = K_2 (C_s - C) \quad (5 9)$$

donde, por ejemplo,  $u$  y  $v$  están dados por las ecs 5 2 y 5 3. No vale la pena tratar de obtener soluciones de forma cerrada para las ecuaciones anteriores. Por tanto, para hacer una comparación entre los resultados del modelo estocástico y los del determinístico, se puede obtener fácilmente una solución analítica a lo largo del eje- $x$ . De acuerdo con esto, cuando  $y = 0$ , las ecs 5 2 y 5 3 quedan

$$u = U \frac{\sinh \lambda x}{\cosh \lambda x - 1} \quad \text{y} \quad V' = 0 \quad (5 10)$$

Sustituyendo estas cifras en las ecs 5 8 y 5 9

$$U \frac{\sinh \lambda x}{\cosh \lambda x - 1} \frac{dL}{dx} + K_1 L = 0 \quad (5 11)$$

$$U \frac{\sinh \lambda x}{\cosh \lambda x - 1} \frac{dC}{dx} + K_1 L = K_2 (C_s - C) \quad (5 12)$$

La solución a la ec 5.11 es

$$L = L_0 \left[ \frac{1}{2} (\cosh x + 1) \right]^{-\delta} \quad (5.13)$$

donde  $\delta = K_1 B^2 D / 2\pi Q_0$ . Usando los mismos valores numéricos, la ec 5 13 se muestra como la línea sólida en la fig 7. La concordancia con los resultados del modelo de celdillas de mezclado es satisfactoria. La solución de la ec 5 12 no se realizó.

Incidentalmente, en la zona de flujo radial (cerca del origen) es de esperarse que la ec 5 13 coincida con el resultado obtenido por la distribución de *DBO* en un flujo puramente radial, a partir de la ec 4 8 del cap 4. Desarrollando  $\cosh \lambda x$  en una serie para valores de  $\lambda x$  pequeños, se llega a

$$L = L_0 \left[ 1 - \frac{\pi K_1 D}{2 Q_0} x^2 \right] \quad (5 14)$$

Este es precisamente el resultado obtenido cuando la ec 4 8 se escribe para valores pequeños de  $r$ .

Del mismo modo, para valores altos de  $x$ , se esperará que la ec 5 13 sea la misma que el resultado dado por la ec 2 5 del cap 2 para flujo uniforme permanente en un canal. Para  $\lambda x$  grande

$\cosh \lambda x = \frac{1}{2} \exp(\lambda x)$ , y la ec 5 13 queda

$$L = L_0 \left[ \frac{1}{4} \exp(\lambda x) \right]^{-\delta} = 4^{\delta} L_0 \exp(-K_1 x / U) \quad (5 15)$$

Este resultado coincide con la ec 2 5 con la modificación de que sea introducida una *DBO* "efectiva",  $L'_0 = 4^{\delta} L_0$ , en el caso de la fila infinita de fuentes. Alternativamente, no es difícil demostrar que las ecs 2 5 y 5 15 son idénticas si se localiza un origen "virtual" para la fila de fuentes a una distancia,  $x_0 = (U/K_1) \log_e 4^{\delta}$ , en la dirección positiva de  $x$  desde el origen real.

## 6. LAGO DE CHAPALA: MODELO DE CELDILLAS DE MEZCLADO

El lago de Chapala se encuentra más o menos a 50 km al sur de la ciudad de Guadalajara. Su longitud es de 80 km, su anchura varía de 6 a 25 km y su área superficial es, aproximadamente,  $1.130 \text{ km}^2$ . La profundidad promedio es alrededor de 7 m y su capacidad es aproximadamente 6.800 millones de  $\text{m}^3$ .

Solo comprende dos ríos de significación: el Lerma, que entra en el lago por el lado este y el Santiago, que fluye del lago cercano a la esquina noreste, a menos de 15 km desde la boca del Lerma. La elevación del lago se controla con una presa en Poncitlán, localizada a unos 25 km del lago, sobre el río Santiago. Una presa derivadora en el km 40 sobre el río Santiago desvía aproximadamente a  $5 \text{ m}^3/\text{seg}$  para el abastecimiento de agua de Guadalajara.

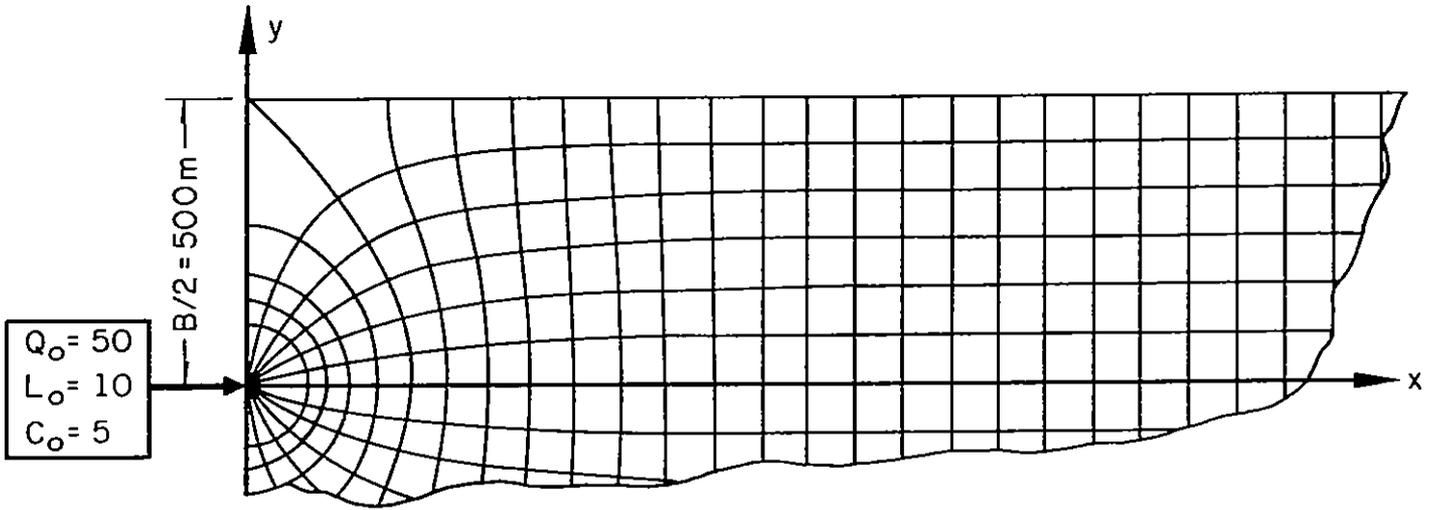


Fig 5.

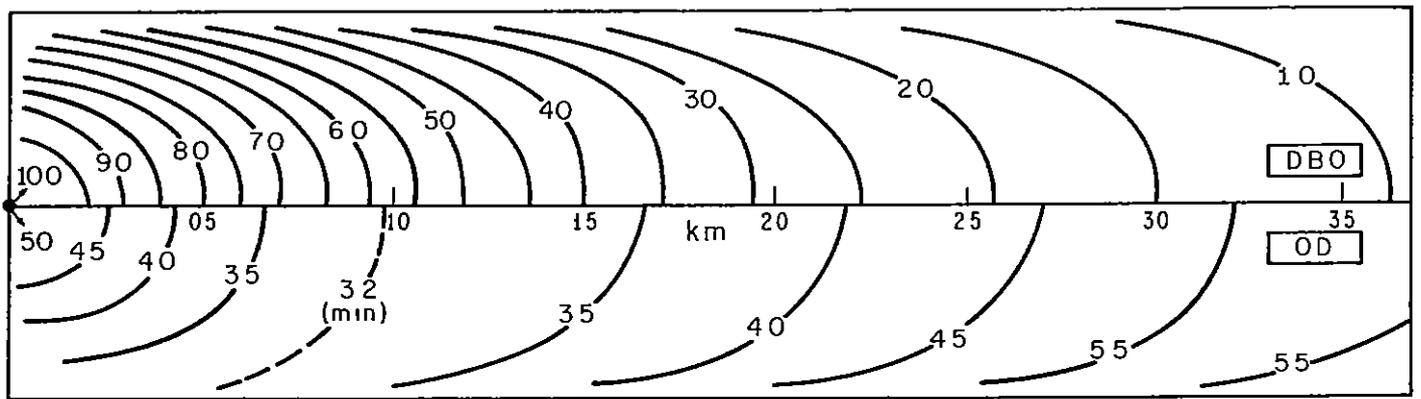


Fig 6

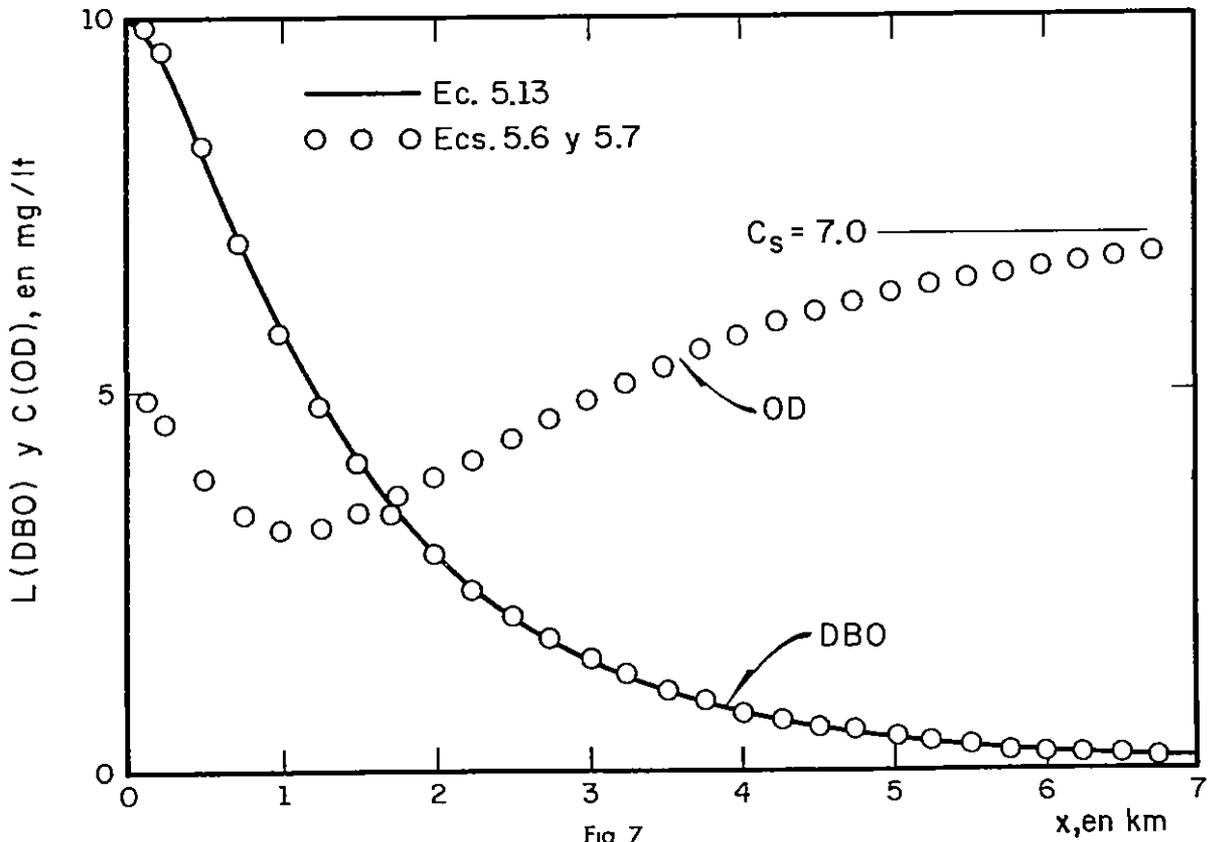


Fig 7

Se diseñó una red de flujo de la region este del lago (fig 8), que consiste en 7 canales de flujo ( $j = 1$  a  $7$ ) y 14 caídas de potencial ( $k = 1$  a  $14$ ). Se midieron las áreas de los "cuadrados" y usando una profundidad  $D = 7$  m, se calculó el volumen de las celdillas de mezclado. Se consideró la descarga del río Lerma como  $Q_0 = 100$  m<sup>3</sup>/seg, así que la descarga a través de cada uno de los 7 canales de flujo fue  $Q_j = 14,29$  m<sup>3</sup>/seg. Se emplearon los valores siguientes para los diferentes coeficientes.

$$L_0 = 10.0 \text{ mg/lit}$$

$$C_0 = 3.0 \text{ mg/lit}$$

$$C_s = 7.0 \text{ mg/lit}$$

$$K_1 = 0.030 \text{ día}^{-1}$$

$$K_2 = 0.060 \text{ día}^{-1}$$

$$L^* = K_p$$

$$= K_r$$

$$= K_b$$

$$= 0$$

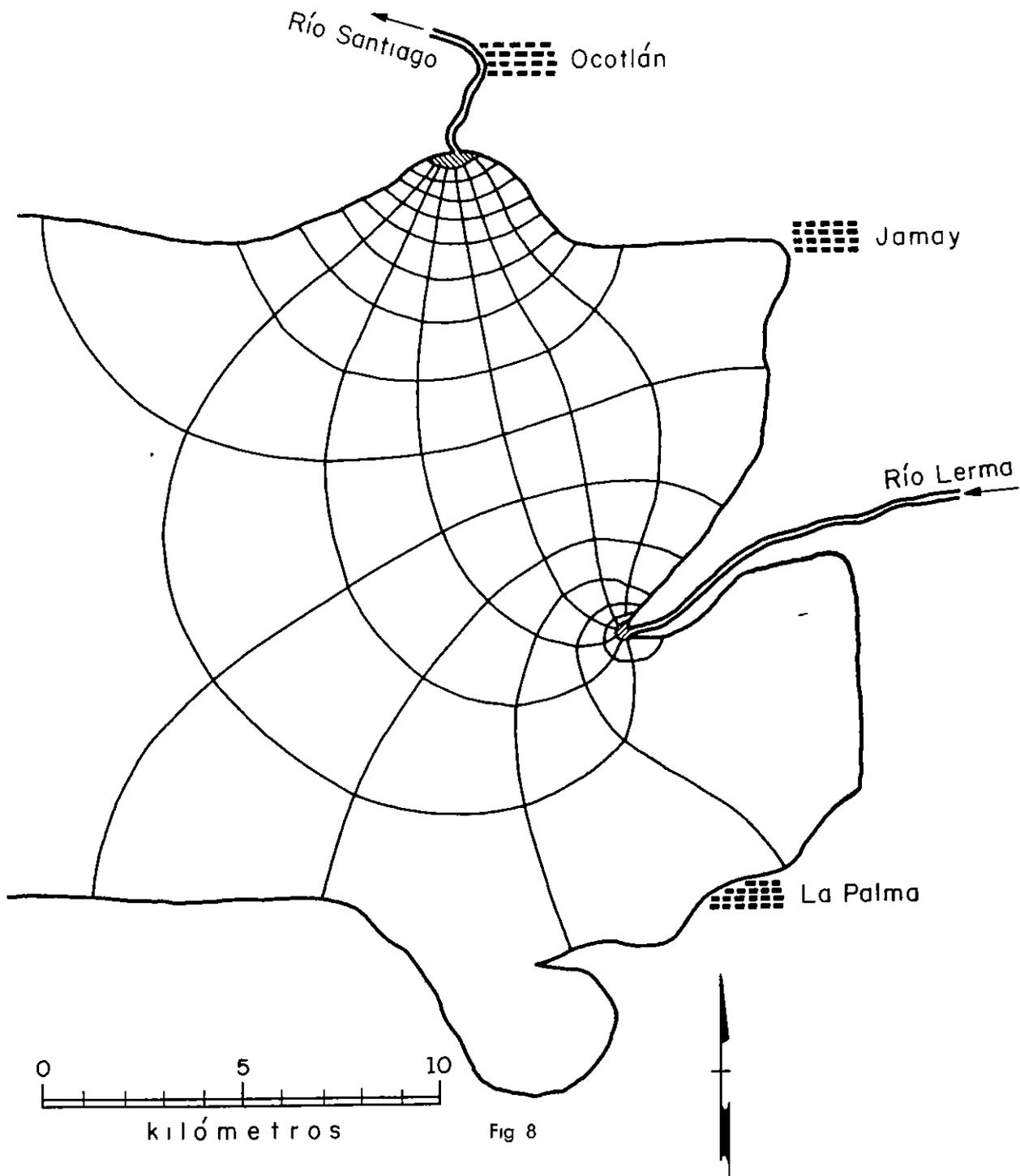


Fig 8

El valor  $C_s = 7.0$  mg/lit corresponde a la temperatura de 25°C y a la presión atmosférica del lago de Chapala (1 525 msnm;  $p = 634$  mm Hg).

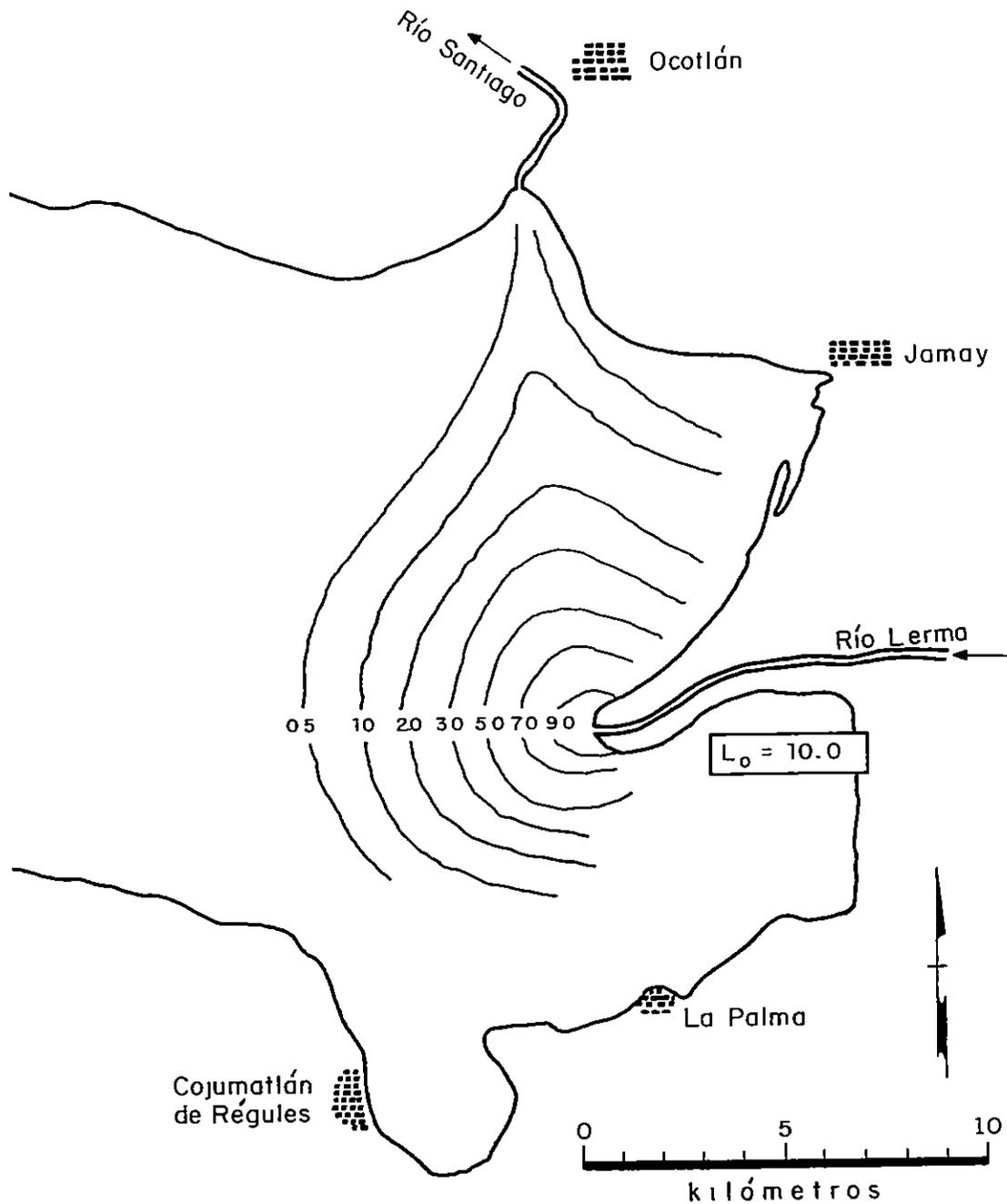
Se desarrolló una correlación entre el coeficiente de reaeración,  $K_2$ , y la velocidad del viento. Esta correlación se presenta en una publicación reciente de Banks, Jaramillo, Lizárraga y Paredes (ref 3). El valor  $K_2 = 0.060$  día<sup>-1</sup> corresponde a una velocidad del viento de aproximadamente 3.5 m/seg. El valor del coeficiente de desoxigenación,  $K_1 = 0.030$  día<sup>-1</sup>, fue seleccionado arbitrariamente.

Estos valores numéricos fueron sustituidos en las ecs 5.6 y 5.7 para calcular los valores de la *DBO* y del *OD*

en cada una de las celdillas, los resultados se muestran en la tabla 2. El número superior en cada celdilla de la tabla es el valor de la *DBO*, el inferior es el *OD*.

Con relación a la fig 8, el número del canal  $j$  se midió en el sentido de las manecillas del reloj, a partir de la boca del río Lerma, la caída de potencial  $k$  comienza en la boca del Lerma.

Los valores numéricos que aparecen en la tabla 2 fueron dibujados en un mapa de la región este del lago y se trazaron curvas suaves a través de los valores iguales de *DBO* y de *OD*. Los resultados se muestran en las figs 9 y 10. La línea discontinua de la fig 10 muestra la localización del valor mínimo de *OD*, que es aproximadamente 2.55 mg/lit.



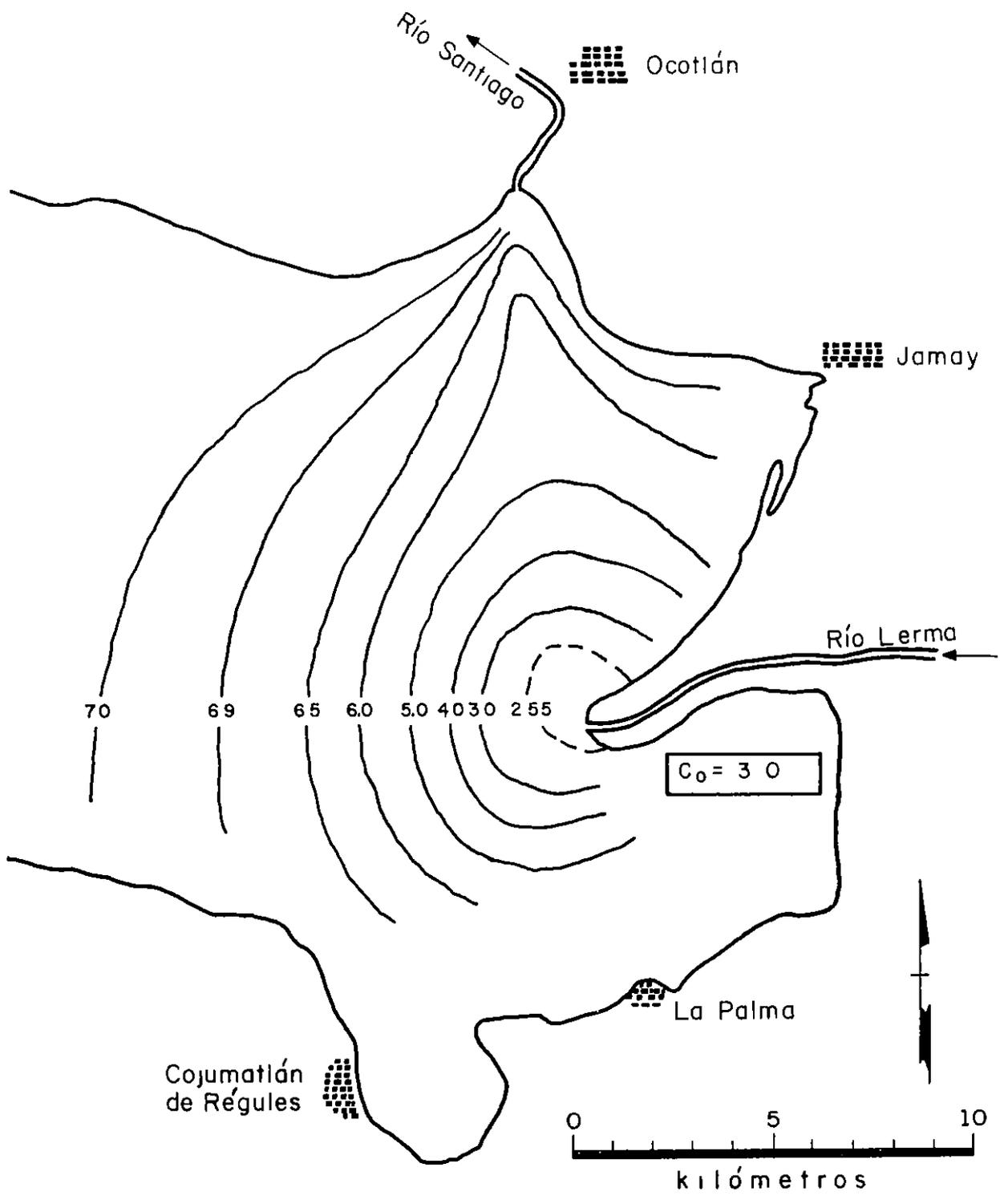


Fig 10

TABLA 2 VALORES DE *DBO* (NUMEROS SUPERIORES) Y DE *OD* (NUMEROS INFERIORES) PARA CADA CELDILLA DE LA RED DE FLUJO EN LA ZONA OCOTLAN DEL LAGO DE CHAPALA

Valor de <i>j</i>		1	2	3	4	5	6	7
Valor de <i>k</i>	1	9.27	9.59	9.72	9.76	9.84	9.89	9.96
		2.77	2.85	2.89	2.91	2.94	2.96	2.98
	2	0.86	7.49	8.49	9.18	9.39	9.55	9.80
		6.19	2.60	2.62	2.73	2.79	2.84	2.92
	3	0.16	3.70	6.24	7.86	8.38	8.98	9.46
		6.80	3.77	2.70	2.54	2.58	2.68	2.80
	4	0.03	1.09	3.19	5.45	6.67	7.24	7.71
		6.95	5.73	3.98	2.86	2.57	2.54	2.56
	5	0.01	0.26	1.30	2.97	4.49	4.73	4.89
		6.99	6.64	5.45	4.06	3.18	3.12	3.11
	6	0.00	0.05	0.53	1.61	2.67	2.33	1.72
		7.00	6.91	6.27	5.10	4.21	4.53	5.12
	7		0.02	0.26	0.93	1.64	1.30	0.45
			6.97	6.61	5.77	5.03	5.40	6.37
	8		0.01	0.17	0.63	1.15	0.93	0.33
			6.98	6.73	6.11	5.50	5.77	6.51
	9		0.00	0.13	0.50	0.96	0.80	0.29
			6.99	6.78	6.27	5.69	5.91	6.56
	10		0.00	0.12	0.44	0.86	0.73	0.27
			7.00	6.80	6.35	5.81	5.98	6.59
	11			0.11	0.40	0.78	0.67	0.25
				6.82	6.40	5.89	6.05	6.62
	12			0.10	0.37	0.74	0.63	0.24
				6.83	6.43	5.94	6.09	6.64
	13			0.10	0.36	0.71	0.61	0.23
				6.83	6.44	5.98	6.12	6.65
	14			0.10	0.35	0.70	0.60	0.22
				6.84	6.45	5.99	6.13	6.65

## 7. LAGO DE CHAPALA. MEDICIONES EN EL CAMPO

Una de las primeras y principales labores que se realizaron en el presente estudio, fue el diseño, fabricación e instalación de 25 boyas de acero para localizar las estaciones de muestreo en el lago. Se instalaron ocho de estas boyas (numeros 01 a 08) en el lado oeste del lago (zona Jocotepec), otras ocho (numeros 10 a 17) se colocaron en la región central (zona Chapala), las nueve restantes (numeros 20 a 28) fueron instaladas en la sección este del lago (zona Ocotlan). El diseño de estas boyas se muestra en la fig 11.

El estudio consiste en una serie de "fases" desarrolladas en intervalos de uno a dos meses. Durante cada fase, se determinan propiedades físicas, químicas, biológicas y bacteriológicas del lago en cada una de las 25 estaciones de muestreo y también en puntos apropiados en los ríos Lerma y Santiago. A finales de octubre y principios de noviembre de 1973, se efectuaron las operaciones correspondientes a la cuarta fase de muestreos.

Durante la cuarta fase, la descarga del río Lerma fue de 54.9 a 92.4 m<sup>3</sup>/seg con un promedio de 68.9 m<sup>3</sup>/seg. La descarga media del río Santiago fue 172.6 m<sup>3</sup>/seg, variando de 47.7 a 238.7 m<sup>3</sup>/seg. La temperatura del agua estuvo entre 21° y 23°C. Fue imposible obtener mediciones continuas de la velocidad y dirección del viento en todas las estaciones, aunque se realizaron mediciones durante cada periodo de muestreo en cada boya. Los valores variaron de 0 a 7 m/seg, la mayoría de las veces en la dirección este a oeste. Se empleó una velocidad promedio de 3.5 m/seg para estimar el coeficiente de reaeración,  $K_2 = 0.060 \text{ día}^{-1}$ .

Las mediciones de la cuarta fase en la zona Ocotlán se obtuvieron del 23 al 25 de octubre. En la fig 12 se muestran los valores de DBO y OD determinados durante este periodo en las boyas 23 a 27 y en las estaciones del río Lerma (L-1, L-2) y del Santiago (S-0).

La DBO real del río Lerma (4.8 mg/lit) fue considerablemente menor que el valor  $L_0 = 10$  utilizado en el ejemplo del cap 6. También el OD real (4.2 mg/lit) fue ligeramente mayor que el valor  $C_0 = 3$ , seleccionado para el ejemplo. Además, en el cálculo de las celdillas de mezclado se hicieron diversas consideraciones sobre los valores de los distintos coeficientes, particularmente en el muy importante de desoxigenación. Aun así, existe concordancia razonable entre los valores observados (fig 12) y los calculados (figs 9 y 10). Esto es especialmente verdadero para la distribución de oxígeno disuelto.

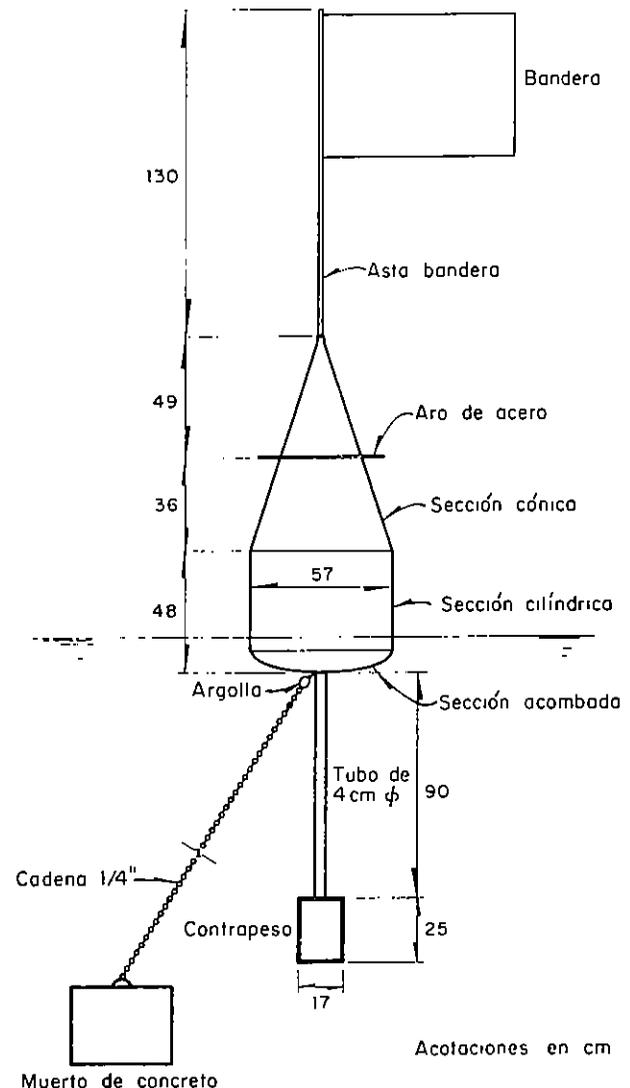


Fig 11

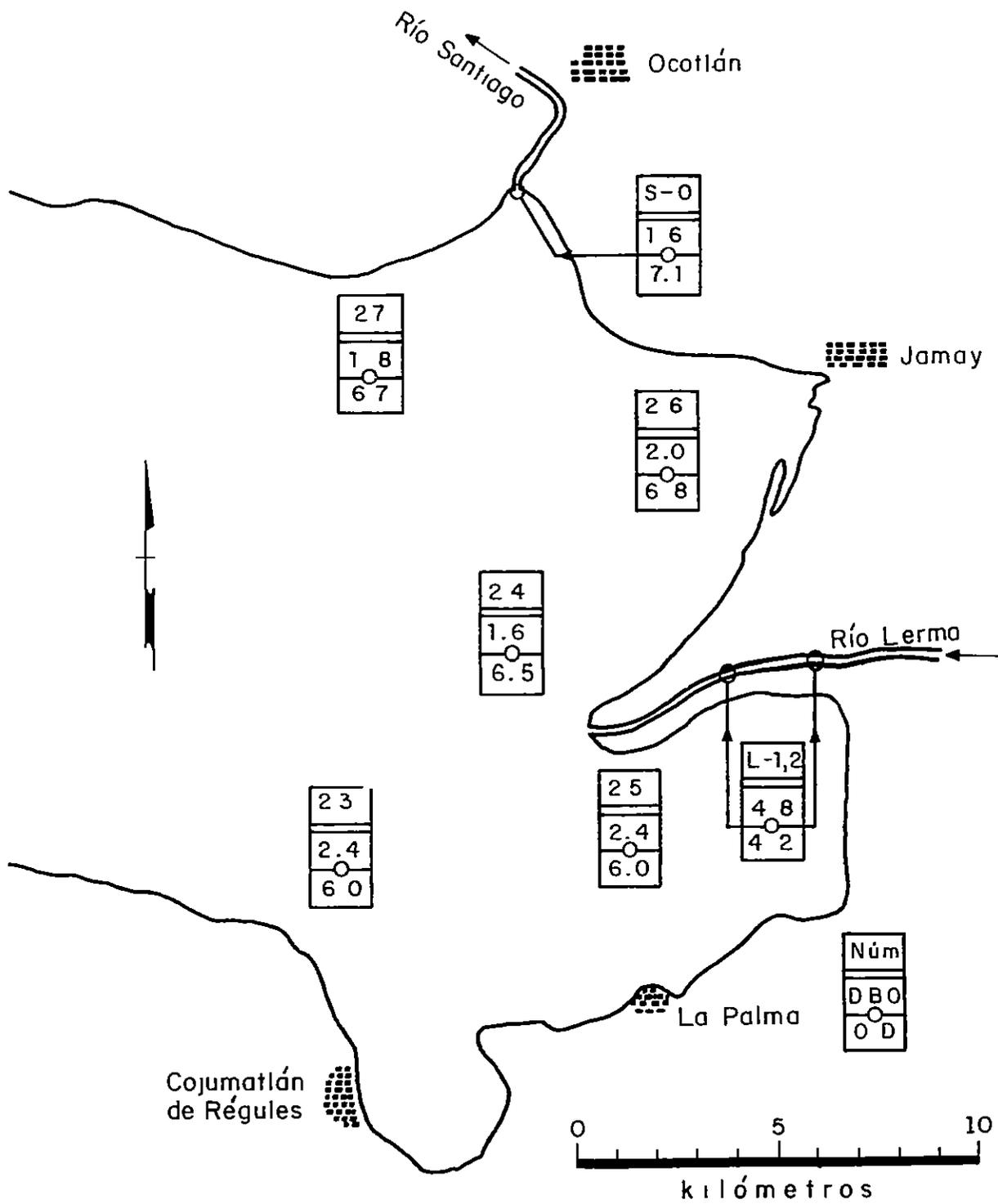


Fig 12

## 8. CONCLUSIONES

Con objeto de usar el modelo de celdillas de mezclado para determinar las distribuciones de demanda bioquímica de oxígeno y de oxígeno disuelto en un río o en un lago, es necesario tener información referente a los valores de diversos coeficientes. Igualmente importante es poseer datos referentes a distribución de la velocidad. En un río esto no es un gran problema, pero en un lago sí lo es. En la actualidad se está desarrollando otro modelo matemático para tratar de predecir las corrientes generadas por el viento en el lago Chapala.

Si la información arriba indicada está disponible, el modelo estocástico de celdillas de mezclado es fácil de aplicar a problemas que serían extremadamente difíciles con un modelo determinístico. El modelo de celdillas de mezclado hace posible que los diversos coeficientes tomen valores diferentes en cada celdilla, además permite fuentes y sumideros de *DBO* y *OD* de potencias arbitrarias en posiciones correspondientes al problema real. Por ejemplo, en el lago de Chapala, que tiene relativamente alta densidad de plantas acuáticas en la sección este durante ciertos meses del año, esta se refleja en valores de  $K_p$  (fotosíntesis) y  $K_r$  (respiración de plantas) diferentes a los de otras secciones del lago.

## 9. RECONOCIMIENTO

El autor agradece al Ing. Jorge A. Lizárraga su ayuda en la traducción de este artículo.

## 10. REFERENCIAS

- 1 H. W. Streeter y E. B. Phelps, "A study of the pollution and natural purification of the Ohio River", Public Health Bulletin No. 146, U. S. Public Health Service, Washington (1958).
- 2 L. M. Milne-Thompson, "Theoretical-Hydrodynamics", Macmillan Company, Nueva York (1950), p. 258.
- 3 R. B. Banks, J. N. Jaramillo, J. A. Lizárraga y M. A. Paredes, "Estudio limnológico del lago Chapala", patrocinado por la Secretaría de Recursos Hidráulicos, No. SP-72-C-6, Clave No. UPCA-72-6, Instituto de Ingeniería, UNAM (jun. 1973).